1. a. Commençons par exprimer les informations fournies dans l'énoncé, en termes de probabilités à l'aide des événements V et T.

▪ « Dans un pays, 2% de la population est contaminée par un virus » : si on prend une personne au hasard dans cette population, on est en situation d'équiprobabilité. De ce fait, la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population soit contaminée par le virus est $\frac{2}{100} = 0{,}02$.
Autrement dit $P(V) = 0{,}02$.

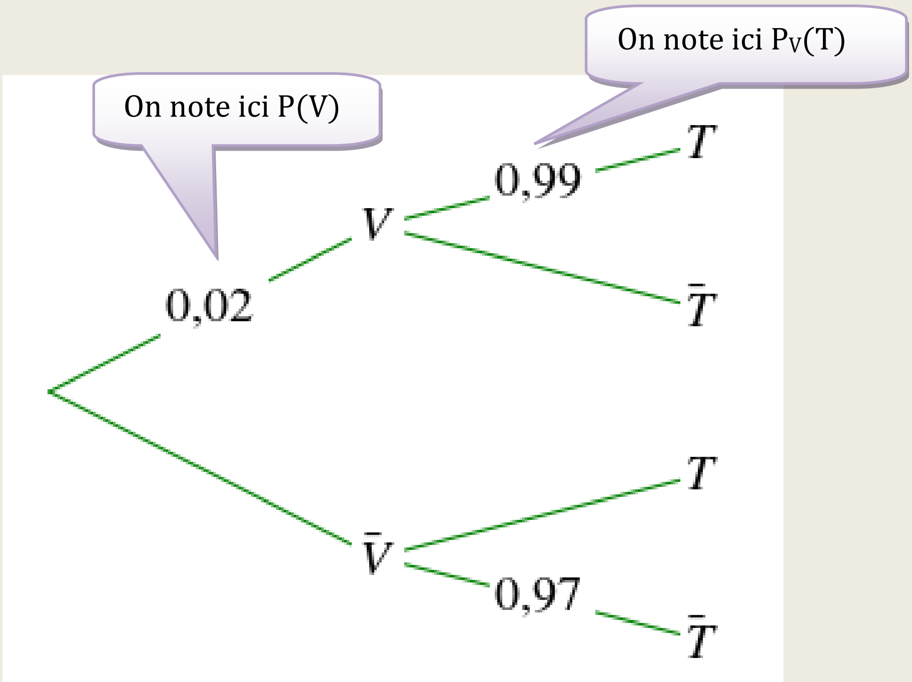
▪ « La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 » : autrement dit, la probabilité, sachant qu'une personne est contaminée, qu'elle ait un test positif est 0,99.
Il s'agit donc d'une probabilité conditionnelle, plus précisément $P_V(T)$.
On a donc $P_V(T) = 0{,}99$

▪ « La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 » : autrement dit, la probabilité, sachant qu'une personne n'est pas contaminée, qu'elle ait un test négatif est 0,97.
Il s'agit donc de la probabilité conditionnelle $P_{\overline{V}}(\overline{T})$.
D'où $P_{\overline{V}}(\overline{T}) = 0{,}97$.

Remarque
Cette phase d'interprétation de l'énoncé est très importante. En particulier, il faut bien reconnaître les probabilités conditionnelles, qui ne sont pas systématiquement décelables grâce à la présence d'un « sachant que … ».

b. Arbre pondéré

On construit l'arbre et on indique les probabilités déjà connues :

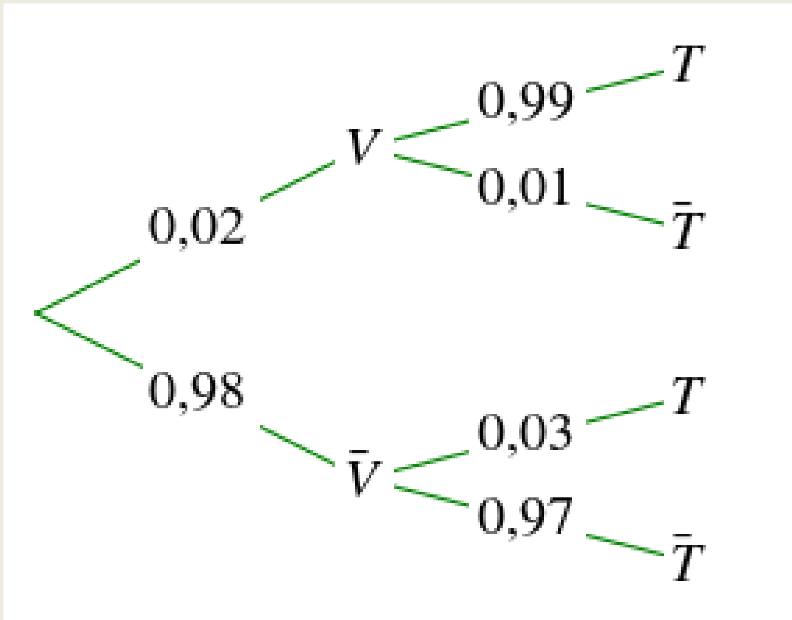


On calcule les probabilités qui manquent :

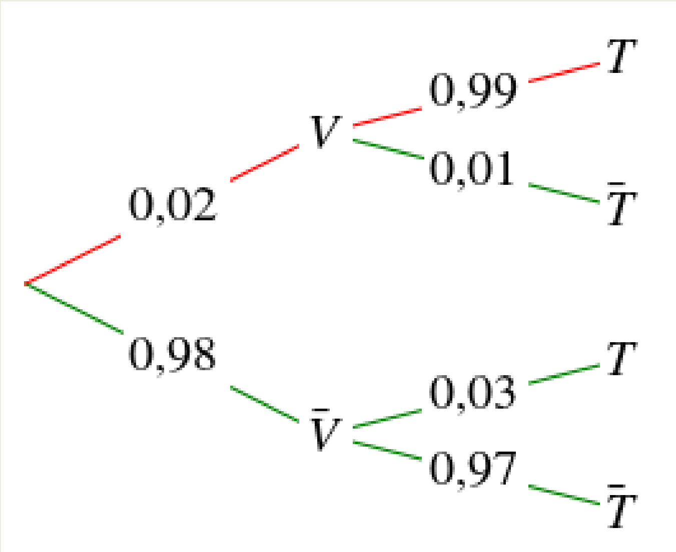
$P(\overline{V}) = 1 - P(V) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$

$P_V(\overline{T}) = 1 - P_V(T) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$

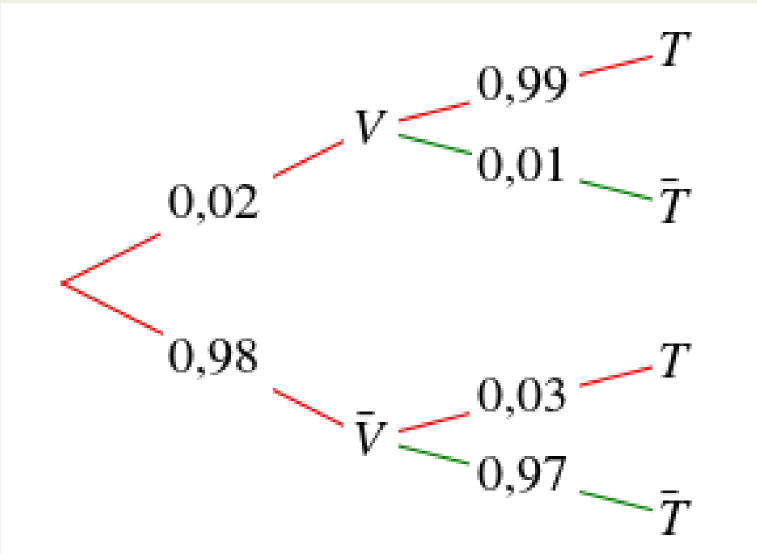
$P_{\overline{V}}(T) = 1 - P_{\overline{V}}(\overline{T}) = 1 - 0{,}97 = 0{,}03$ puis on les reporte sur l'arbre :



c. En utilisant les règles de fonctionnement d'un arbre pondéré, $P(V \cap T)$ est le produit des probabilités rencontrées sur le chemin représenté en rouge ci-dessous, chemin qui conduit à la réalisation de l'événement $V \cap T$.
Donc $P(V \cap T) = 0{,}02 \times 0{,}99 = 0{,}0198$.



2. On cherche ici $P(T)$. Les chemins conduisant à la réalisation de l'événement T sont représentés en rouge sur l'arbre ci-dessous :



En utilisant les règles de fonctionnement d'un arbre pondéré on obtient donc : $P(T) = 0{,}02 \times 0{,}99 + 0{,}98 \times 0{,}03 = 0{,}0492$.

Remarque
Cette règle de fonctionnement sur l'arbre traduit les égalités suivantes :
$P(T) = P(V \cap T) + P(\overline{V} \cap T) = P_V(T) \times P(V) + P_{\overline{V}}(T) \times P(\overline{V})$, formule des probabilités totales.

3. a. Pour justifier cette phrase, il faut montrer que $P_T(V) \approx 0{,}4$.

Or $P_T(V) = \frac{P(T \cap V)}{P(T)} = \frac{0{,}0198}{0{,}0492} \approx 0{,}4024$ à 10^{-4} près.

Ceci justifie donc l'affirmation proposée dans l'énoncé.

Conseil

Un jour de bac, on a pu faire une erreur dans les questions précédentes. Il est donc important de rappeler la formule et d'écrire l'opération à effectuer avant de donner le résultat obtenu pour montrer la démarche employée dans cette question. Celle-ci peut être juste même si les résultats numériques sont faux. Bien vérifier cependant que les probabilités trouvées sont toutes comprises entre 0 et 1 !

b. On cherche à calculer $P_{\overline{T}}(\overline{V})$.

Par définition, $P_{\overline{T}}(\overline{V}) = \frac{P(\overline{V} \cap \overline{T})}{P(\overline{T})}$.

Sur l'arbre pondéré on obtient $P(\overline{V} \cap \overline{T}) = 0{,}98 \times 0{,}97$.

D'autre part donc $P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0{,}0492$.

Donc $P_{\overline{T}}(\overline{V}) = \frac{0{,}98 \times 0{,}97}{1 - 0{,}0492} \approx 0{,}9998$ à 10^{-4} près.

Remarque

Cette question est très classique, on parle d'inversion du conditionnement car on connaît $P_{\overline{V}}(\overline{T})$ et on cherche $P_{\overline{T}}(\overline{V})$.

De façon générale, pour passer de $P_A(B)$ à $P_B(A)$, on repasse par la définition :

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$, le calcul de $P(A \cap B)$ par $P_A(B)P(A)$ pouvant se faire directement à l'aide de l'arbre pondéré comme dans la solution ci-dessus.