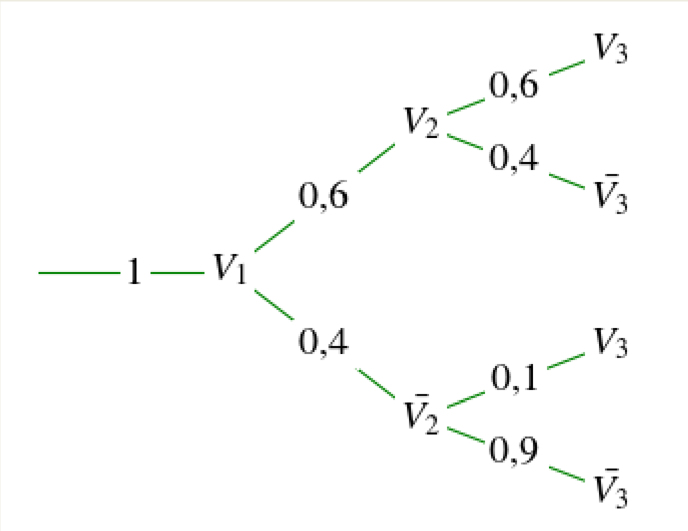
1. Aidons nous d'un arbre de probabilité en y faisant figurer les trois premiers sondages.
Par énoncé on sait que :
- le premier sondage est positif, c'est-à-dire que $p_1 = \mathrm{P}(\mathrm{V}_1) = 1$.
- 0,6 et 0,9 sont des probabilités conditionnelles que l'on peut reporter directement sur l'arbre :



On obtient alors :

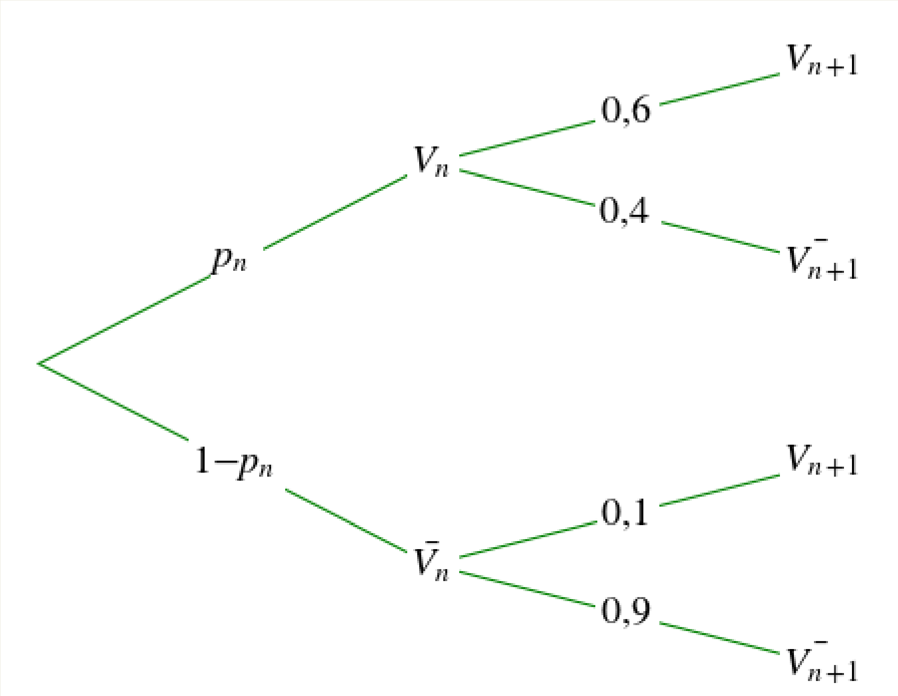
a. $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(V_2 \cap V_3) = 1\times0{,}6\times0{,}6 = 0{,}36$.

b. $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}) = 1\times0{,}4\times0{,}9 = 0{,}36$.

2. La probabilité que le 3[e] sondage soit positif est :

$$p_3 = \mathrm{P}(V_3) = 0{,}4\times0{,}1 + 0{,}6\times0{,}6 = 0{,}4.$$

3. a. Arbre complété :



On sait que $P(V_n)$ est noté p_n donc $P(\overline{V_n}) = 1 - p_n$.
Les autres probabilités sont les probabilités conditionnelles données dans l'énoncé.

b. Pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = P(V_{n+1})$.

A l'aide de l'arbre ci-dessus, on obtient :

$P(V_{n+1}) = p_n \times 0{,}6 + (1 - p_n) \times 0{,}1$ soit $p_{n+1} = 0{,}6\,p_n + 0{,}1 - 0{,}1\,p_n$.

On en déduit donc bien que $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}1$ pour tout entier naturel n non nul.

4. a. Pour tout $n \geq 1$,

$u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}2 = 0{,}5p_n + 0{,}1 - 0{,}2 = 0{,}5p_n - 0{,}1 = 0{,}5(p_n - 0{,}2) = 0{,}5u_n$.

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison 0,5.

b. On en déduit que pour tout $n \geq 1, u_n = u_1 \times 0{,}5^{n-1}$.

Son premier terme est $u_1 = p_1 - 0{,}2 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

Donc finalement $u_n = 0{,}8 \times 0{,}5^{n-1}$ pour tout entier naturel n non nul.

Or $u_n = p_n - 0{,}2$ donne $p_n = u_n + 0{,}2$.

On a donc $p_n = 0{,}8 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}2$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

c. Comme $0 < 0{,}5 < 1$, quand n tend vers $+\infty$, $0{,}5^{n-1}$ tend vers 0 donc la suite (p_n) converge vers 0,2.

Quand n devient très grand, la probabilité de réaliser un sondage positif est très proche de 0,2.