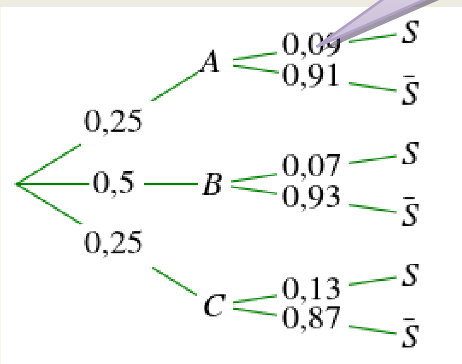
1. Comme on choisit au hasard une personne dans la population, on est dans une situation d'équiprobabilité.
On a donc : $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}25$ et $P(C) = 0{,}5$.

De même, on déduit de l'énoncé les probabilités conditionnelles suivantes :
$P_A(S) = 0{,}09$, $P_B(S) = 0{,}07$ et $P_C(S) = 0{,}13$.

On obtient donc l'arbre suivant :

On écrit ici $P_A(S)$



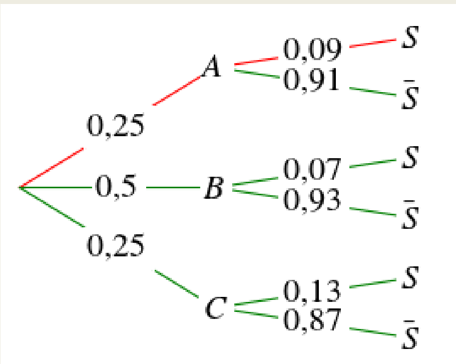
On calcule les probabilités qui manquent dans l'énoncé :

$P_A(\bar{S}) = 1 - P_A(S) = 1 - 0{,}09 = 0{,}91$

$P_B(\bar{S}) = 1 - P_B(S) = 1 - 0{,}07 = 0{,}93$

$P_C(\bar{S}) = 1 - P_C(S) = 1 - 0{,}13 = 0{,}87$

2. a. À l'aide de l'arbre, on obtient alors $P(A \cap S) = 0{,}25 \times 0{,}09 = 0{,}0225$.



Remarque
Ce calcul correspond à la formule $P(A \cap S) = P_A(S) \times P(A)$, qui permet d'obtenir la probabilité le long du chemin représenté en rouge ci-dessus comme le produit des probabilités figurant sur ses branches.

Math'x Terminale S © Éditions Didier 2012

De même $P(B \cap S) = 0{,}5 \times 0{,}07 = 0{,}035$ et
$P(C \cap S) = 0{,}25 \times 0{,}13 = 0{,}0325$.

b. $A \cap S$, $B \cap S$ et $C \cap S$ sont deux à deux disjoints et ont pour réunion S (ils forment une partition de S), donc $P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) + P(C \cap S)$.
On a donc $P(S) = 0{,}0225 + 0{,}035 + 0{,}0325 = 0{,}09$.

Remarque
Ceci revient à lire sur l'arbre, la probabilité de S comme la somme des probabilités des chemins menant à la réalisation de S, soit $P(S) = 0{,}25 \times 0{,}09 + 0{,}5 \times 0{,}07 + 0{,}25 \times 0{,}13$.

3. Les événements A et S sont indépendants si et seulement si $P_A(S) = P(S)$, ce qui est le cas. Les événements A et S sont donc indépendants.
En revanche $P_B(S) = 0{,}07$ donc $P_B(S) \neq P(S)$ et les événements B et S ne sont pas indépendants.
De même $P_C(S) = 0{,}13$ donc $P_C(S) \neq P(S)$ et les événements C et S ne sont pas indépendants.

4. On cherche ici la probabilité conditionnelle $P_{\overline{S}}(A)$.
On sait que A et S sont indépendants, donc A et $\overline{S}$ le sont aussi (propriété 3 page 376) ce qui permet d'écrire $P_{\overline{S}}(A) = P(A) = 0{,}25$.

Remarque
On pourrait retrouver ce résultat en « inversant le conditionnement » de façon classique :
$P_{\overline{S}}(A) = \frac{P(\overline{S} \cap A)}{P(\overline{S})} = \frac{P_A(\overline{S})P(A)}{P(\overline{S})} = \frac{P_A(\overline{S})P(A)}{1 - P(S)} = \frac{0{,}25 \times 0{,}91}{0{,}91} = 0{,}25$.