Soient les points A$(-2\,;0\,;1)$, B$(1\,;2\,;-1\,)$ et C$(-2\,;2\,;2)$ dans un repère orthonormé de l'espace.

1. a. Trois points non alignés définissent un plan. On cherche donc à démontrer que A, B et C ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{AB}(3\,;2\,;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(0\,;2\,;\;1)$ ne sont pas colinéaires (en effet, leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles : $2\times 1=2$ et $3\times 1=3$ et non 0) donc les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent un plan.

b. Pour montrer qu'une équation du plan (ABC) est $2x-y+2z+2=0$, il suffit de montrer que les coordonnées de chacun des points A, B et C vérifient l'équation proposée.

$2\times(-2)-0+2\times 1+2\;=\;0$ donc A$(-2\,;0\,;1)$ appartient au plan d'équation $2x-y+2z+2=0$.

$2\times 1-2+2\times(-1)+2=0$ donc B$(1\,;2\,;-1)$ appartient au plan d'équation $2x-y+2z+2=0$.

$2\times(-2)-2+2\times 2+2=0$ donc C$(-2\,;2\,;2)$ appartient au plan d'équation $2x-y+2z+2=0$.

Donc $2x-y+2z+2=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2. $P_1 : x + y - 3z + 3 = 0$ et $P_2 : x - 2y + 6z = 0$.

<u>1ère méthode</u> :

$\overrightarrow{n_1}(1; 1; -3)$ vecteur normal à P_1 et $\overrightarrow{n_2}(1; -2; 6)$ vecteur normal à P_2 ne sont pas colinéaires donc P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite D.

Le texte propose une représentation paramétrique de la droite D. Il suffit de vérifier que tout point $M_t\ (-2\ ;\ 3t - 1\ ;\ t)$ (avec $t \in \mathbb{R}$) appartient à la fois à P_1 et à P_2.

$-2 + (3t - 1) - 3t + 3 = 0$ donc $M_t \in P_1$;

$-2 - 2(3t - 1) + 6t = -2 - 6t + 2 + 6t = 0$ donc $M_t \in P_2$;

Et donc $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3t - 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite D.

<u>2ème méthode</u> :

On résout le système formé par les équations de P_1 et P_2.

$M(x; y; z) \in P_1 \cap P_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3z + 3 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x = -y + 3z - 3 \\ -y + 3z - 3 - 2y + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + 3z - 3 \\ -3y = -9z + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3z - 1 \end{cases}.$

Donc P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite D. En posant $z = t$, on obtient une représentation paramétrique de D : $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3t - 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

3. $\vec{u}(0; 3; 1)$ est un vecteur directeur de D.

$\vec{n}(2\ ;\ -1\ ;\ 2)$ est un vecteur normal à (ABC).

$\vec{u} \cdot \vec{n} = -3 + 2 = -1$ et $-1 \neq 0$ d'où $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux et donc D n'est pas parallèle à (ABC).

On cherche le réel t tel que $M_t(-2 ; 3t-1; t) \in (ABC)$ c'est-à-dire tel que
$2 \times (-2) - (3t - 1) + 2t + 2 = 0$.
On trouve $t = -1$ et donc D coupe (ABC) en K(–2 ; – 4 ; –1).

Remarque

On peut aussi résoudre directement le système formé d'une équation de (ABC) et d'une représentation paramétrique de D.
$M(x ; y ; z) \in D \cap (ABC)$ si et seulement si il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} 2x - y + 2z + 2 = 0 \\ x = -2 \\ y = 3t - 1 \\ z = t \end{cases}$$

Ce système équivaut à $\begin{cases} 2 \times (-2) - (3t - 1) + 2t + 2 = 0 \\ x = -2 \\ y = 3t - 1 \\ z = t \end{cases}$ soit à $\begin{cases} t = -1 \\ x = -2 \\ y = -4 \\ z = -1 \end{cases}$

Et donc D et (ABC) sont sécants en K(–2 ; –4 ; –1).

4. a. Méthode : la sphère de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points de l'espace situés à la distance r de Ω.
On cherche s'il existe des points de D appartenant à la sphère $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ de centre $\Omega(1 ; -3 ; 1)$ et de rayon $r = 3$.

$M_t(-2 ; 3t-1; t) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \Omega M_t = r \Leftrightarrow \Omega {M_t}^2 = r^2$

$$\Leftrightarrow (-2-1)^2 + (3t - 1 + 3)^2 + (t-1)^2 = 3^2$$

$$\Leftrightarrow 9 + 9t^2 + 12t + 4 + t^2 - 2t + 1 = 9$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 + 2t + 1 = 0.$$

Cette équation du second degré n'a pas de solution car le discriminant Δ est négatif ($\Delta = 4 - 8 = -4$). Donc D ne coupe pas la sphère $\mathcal{S}$.

Remarque
L'intersection d'une droite et d'une sphère peut être :
- soit formée de deux points,
- soit réduite à un point,
- soit vide.

En effet, comme dans le cas de cet exercice, rechercher les points communs éventuels entre une droite et une sphère revient à résoudre une équation du second degré.

b. Méthode : il suffit de démontrer que la distance du point Ω centre de la sphère au plan (ABC) est égale au rayon de la sphère.
Pour cela on calcule d'abord les coordonnées du projeté orthogonal H de Ω sur le plan (ABC).

$\overrightarrow{\Omega H}$ est colinéaire à $\vec{n}(2\,;-1\,;2)$ vecteur normal à (ABC) donc il existe un réel t tel que $\overrightarrow{\Omega H} = t\vec{n}$ soit tel que $\begin{cases} x_H - 1 = 2t \\ y_H + 3 = -t \\ z_H - 1 = 2t \end{cases}$ c'est-à-dire tel que

$$\begin{cases} x_H = 1 + 2t \\ y_H = -3 - t \\ z_H = 1 + 2t \end{cases}$$

Et H appartient au plan (ABC) d'équation $2x - y + 2z + 2 = 0$, d'où $2x_H - y_H + 2z_H + 2 = 0$ soit $2(1 + 2t) - (-3 - t) + 2(1 + 2t) + 2 = 0$.

On obtient : $9t = -9$ soit $t = -1$. Et donc $H(-1\,;\,-2\,;\,-1)$.

$\Omega H = \sqrt{(-1-1)^2 + (-2+3)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3 = r$ rayon de $\mathcal{S}$ donc le plan (ABC) est tangent à la sphère $\mathcal{S}$.

Remarque
Si on note d la distance entre le centre Ω d'une sphère $\mathcal{S}$ et un plan P (c'est-à-dire la distance entre Ω et le projeté orthogonal H de Ω sur P), on peut conclure sur la position relative de $\mathcal{S}$ et de P en comparant d et le rayon r de la sphère $\mathcal{S}$.

- Si $d < r$, alors la sphère $\mathcal{S}$ et le plan P sont sécants suivant un cercle.
- Si $d = r$, alors la sphère $\mathcal{S}$ et le plan P sont tangents en H.
- Si $d > r$, alors la sphère $\mathcal{S}$ et le plan P n'ont aucun point commun.

.