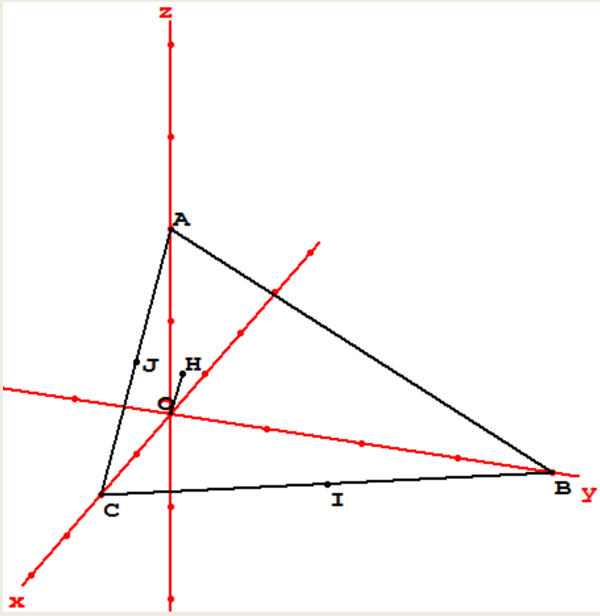
Comme indiqué dans l'analyse de l'énoncé, les trois points A, B et C étant sur les axes du repère, une figure peut être utile.

Cette figure construite avec Geoplan-Geospace est disponible sur le site dans le fichier : C11_exerciceguide_page348.g3w.



Proposition 1 : Faux

L'égalité $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ définit le plan P_1 passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$.

On utilise la propriété 9 page 346 : « soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et P le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. Un point M appartient à P si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. »

Le plan (AOI) est défini par les trois points non alignés A, O et I.

$\overrightarrow{AA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ donc $A \in P_1$.

▪ Calcul de $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{BC}(2; -4; 0)$ et $\overrightarrow{AO}(0; 0; -2)$

$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \times 2 + 0 \times (-4) + (-2) \times 0 = 0$ donc $O \in P_1$.

▪ Calcul de $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}$: I est le milieu de [BC] donc $I(1; 2; 0)$ et $\overrightarrow{AI}(1; 2; -2)$

$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \times 2 + 2 \times (-4) + (-2) \times 0 = -6 \neq 0$ donc $I \notin P_1$.

La proposition est donc fausse.

Remarque
On peut vérifier le résultat avec le Geoplan-Geospace en affichant des équations du plan (AOI) et du plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$.

Proposition 2 : Faux

Rappel : formule du volume d'un tétraèdre de base *B* et de hauteur *h* :

$$V = \frac{1}{3} B \times h.$$

Comme le point A est sur l'axe (Oz), le point B sur l'axe (Oy) et le point C sur l'axe (Ox) , la droite (OA) est perpendiculaire aux droites (OB) et (OC) donc la droite (OA) est orthogonale au plan (OBC). On en déduit que OA est la hauteur issue de A du tétraèdre OABC.

On utilise la définition 3 page 340 : « Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan ».

Les droites (OB) et (OC) sont perpendiculaires donc la base OBC, associée à la hauteur OA, est un triangle rectangle en O.

Son aire est donnée par : $\frac{1}{2} OB \times OC = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$.

Le volume du tétraèdre OABC est donc :

$$\frac{1}{3}(\text{aire}(\text{OBC}) \times \text{OA}) = \frac{1}{3} \times 4 \times 2 = \frac{8}{3} \neq 4.$$

La proposition est donc fausse.

Remarque
On peut vérifier le résultat avec le Geoplan-Geospace en affichant le volume du tétraèdre OABC.

Proposition 3 : Faux

D'après la propriété 1 page 340 : « Si une droite Δ est orthogonale à un plan P alors la droite Δ est orthogonale à toute droite D de ce plan P.»

La contraposée de cette propriété est donc : « S'il existe une droite D du plan P telle que la droite Δ n'est pas orthogonale à D alors la droite Δ n'est pas orthogonale au plan P. »

Montrons que (OJ) n'est pas orthogonale à (AB) : J est le milieu de [AC] donc $\mathrm{J}(1; 0; 1)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(0; 4; -2)$; donc

$$\overrightarrow{\mathrm{OJ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 1 \times 0 + 0 \times 4 + 1 \times (-2) = -2 \neq 0$$

donc (OJ) n'est pas orthogonale à (AB).

La proposition est fausse.

Attention : On peut aussi montrer que (OJ) n'est pas orthogonale à (BC) mais (OJ) est perpendiculaire à la droite (AC) du plan (ABC).

Remarque
On sait que par un point donné, il existe une droite et une seule orthogonale à un plan donc (OH) est l'unique droite orthogonale à (ABC) passant par O et d'après la figure, J n'appartient pas à (OH) ce qui permet de conjecturer la réponse (mais non de la démontrer…).

Proposition 4 : Vrai

Comme indiqué dans l'analyse de l'énoncé et l'aide, il suffit de montrer que les coordonnées des points A, B et C vérifient ou non l'équation proposée.

▪Pour le point $A(0;0;2)$: $2\times 0+0+2\times 2=4$ donc A appartient au plan d'équation $2x+y+2z=4$.

▪Pour le point $B(0;4;0)$: $2\times 0+4+2\times 0=4$ donc B appartient au plan d'équation $2x+y+2z=4$.

▪Pour le point $C(2;0;0)$: $2\times 2+0+2\times 0=4$ donc C appartient au plan d'équation $2x+y+2z=4$.

La proposition est vraie.

Remarques

1. Ici, on ne demande pas de prouver que A, B et C définissent bien un plan ; l'énoncé de la proposition permet de l'admettre. On peut aussi remarquer que, comme A, B et C sont sur chacun des axes et distincts de l'origine O, ils sont non alignés.

2. Dans ce cas, déterminer une équation du plan (ABC) est simple car les points A, B et C appartiennent aux axes du repère.

Soit $ax+by+cz+d=0$ une équation cartésienne de (ABC).

$A(0;0;2)$ appartient à (ABC) donc $2c+d=0$

$B(0;4;0)$ appartient à (ABC) donc $4b+d=0$

$C(2;0;0)$ appartient à (ABC) donc $2a+d=0$

En choisissant $d=-4$, on obtient $c=2$, $b=1$ et $a=2$

d'où $2x+y+2z-4=0$ est une équation de (ABC) .

3. On peut vérifier le résultat avec le Geoplan-Geospace en affichant une équation de (ABC).

Proposition 5 : Vrai

Comme indiqué dans l'aide, il suffit de montrer d'une part que (OH) est orthogonal à (ABC), d'autre part que H est un point de (ABC).

▪ Montrons que (OH) est orthogonal à (ABC) :

Le plan (ABC) a pour équation $2x + y + 2z = 4$ donc le vecteur $\vec{n}(2; 1; 2)$ est normal à (ABC).

Or $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\left(\frac{8}{9}; \frac{4}{9}; \frac{8}{9}\right)$ donc $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{4}{9}\vec{n}$ et donc $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ est colinéaire à $\vec{n}$.

On en déduit que (OH) $\perp$(ABC).

▪ Montrons que H est un point de (ABC) :

Pour le point $\mathrm{H}\left(\frac{8}{9}; \frac{4}{9}; \frac{8}{9}\right)$: $2 \times \frac{8}{9} + \frac{4}{9} + 2 \times \frac{8}{9} = \frac{16+4+16}{9} = 4$ donc H appartient au plan (ABC) d'équation $2x + y + 2z = 4$.

La proposition est vraie.

Remarque :
On peut vérifier le résultat avec le Geoplan-Geospace en affichant les coordonnées de H.

Proposition 6 : Vrai

On connaît les coordonnées des points A, B et C donc on peut calculer les normes des trois vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ et les produits scalaires de deux de ses trois vecteurs. On peut donc utiliser l'expression du produit scalaire à l'aide du cosinus (voir l'exercice corrigé 3 page 343).

$\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\| \, \|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\| \cos(\widehat{\mathrm{ABC}})$.

Or $\overrightarrow{\mathrm{BA}}(0; -4; 2)$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}(2; -4; 0)$ donc

$\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0 \times 2 + (-4) \times (-4) + 2 \times 0 = 16$ et

$\|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\| = \sqrt{0 + 16 + 4} = 2\sqrt{5}$ et $\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\| = \sqrt{4 + 16 + 0} = 2\sqrt{5}$.

On en déduit que $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\times\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{16}{\left(2\sqrt{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$.

A l'aide de la calculatrice, on en déduit que la mesure de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$ est 37° à 1° près.

La proposition est vraie.

Remarque

On peut vérifier le résultat avec le Geoplan-Geospace en affichant la mesure en degré de l'angle $\widehat{ABC}$.

.