Partie A

1. $\overrightarrow{AB}(3\,;3;3)$, $\overrightarrow{AC}(3\,;0;-3)$
donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3\times 3 + 3\times 0 + 3\times(-3) = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux d'où le triangle ABC est rectangle en A.

↘ Méthode :
On peut aussi calculer AB^2, BC^2 et AC^2et vérifier la relation de Pythagore.

2. Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $1x + 1y + 1z - 3 = 0$ donc $\vec{n}(1;1;1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

$\overrightarrow{AB}(3\,;3;3)$ et $\vec{n}(1;1;1)$ donc $\overrightarrow{AB} = 3\vec{n}$ d'où $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\vec{n}$.
On en déduit que $(AB)\perp\mathcal{P}$.

De plus $3 - 2 + 2 - 3 = 0$ donc A(3 ;-2 ;2) $\in \mathcal{P}$.

↘ Méthode :
Pour montrer que (AB) et $\mathcal{P}$ sont orthogonaux, il suffit de montrer que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Pour montrer que A appartient à $\mathcal{P}$, il suffit de montrer que ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{P}$ proposée.

3.a. $\mathcal{P}'$ est orthogonal à (AC) donc tout vecteur directeur de (AC) est normal à $\mathcal{P}'$.
$\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ (1 ; 0 ;-1) est normal à $\mathcal{P}'$ donc $\mathcal{P}'$ admet une équation de la forme : $x - z + d = 0$.

A(3 ; -2 ; 2) $\in \mathcal{P}'$ d'où $3 - 2 + d = 0$ soit $d = -1$.
$\mathcal{P}'$ a pour équation $-z - 1 = 0$.

↘ Méthode :
On peut aussi utiliser la caractérisation du plan :
$\overrightarrow{AM}\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = 0$.

b. $M(x;y;z) \in \Delta \Leftrightarrow M(x;y;;z) \in \mathcal{P}\cap\mathcal{P}'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire $\begin{cases} y = -x - z + 3 \\ x = z + 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y = -z - 1 - z + 3 \\ x = z + 1 \end{cases}$

ce qui donne $\begin{cases} y = -2z + 2 \\ x = z + 1 \end{cases}$.

D'où $\Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

↘ Méthode :
Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ doivent vérifier les deux équations.

On obtient un système de deux équations à deux inconnues qu'on transforme pour exprimer deux des inconnues en fonction de la troisième.

z étant quelconque dans $\mathbb{R}$, on obtient une représentation paramétrique de Δ en posant $z = t$.

Partie B

1. $\overrightarrow{AD}(-3;6;-3)$, $\overrightarrow{AB}(3\,;3;3)$ et $\overrightarrow{AC}(3\,;0;-3)$ donc
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=3\times(-3)+3\times 6+3\times(-3)=0$ et
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=3\times(-3)+0\times 6+(-3)\times(-3)=0$
donc (AD) ⊥(AB) et (AD)⊥(AC).

(AD) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC) donc (AD) est orthogonale à (ABC).

2. D'après **1.**, DA est la hauteur passant par D du tétraèdre ABCD car (DA) ⊥ (ABC) et A ∊ (ABC) et donc

$$V=\frac{1}{3}\text{aire(ABC)}\times\text{DA}=\frac{1}{3}\times\frac{\text{AB}\times\text{AC}}{2}\times\text{DA}$$

$\text{AB}=\sqrt{9+9+9}=3\sqrt{3}$
$\text{AC}=\sqrt{9+0+9}=3\sqrt{2}$
$\text{AD}=\sqrt{9+36+9}=3\sqrt{6}$
donc
$V=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}}{2}\times 3\sqrt{6}=27.$

3. $\overrightarrow{DB}(6;-3;6)$, $\overrightarrow{DC}(6;-6;0)$ donc
$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=6\times 6+(-3)\times(-6)+6\times 0=54.$

De plus, $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\text{DB}\times\text{DC}\times\cos\widehat{\text{BDC}}$ avec
$\text{DB}=\sqrt{39+9+36}=9$ et $\text{DC}=\sqrt{36+36}=6\sqrt{2}$.

On a donc $\cos\widehat{\text{BDC}}=\frac{\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}}{\text{DB}\times\text{DC}}=\frac{54}{9\times 6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,
d'où $\widehat{\text{BDC}}=\frac{\pi}{4}$ (radians).

4. Soit h la distance du point A au plan (BDC).
$V=\frac{1}{3}\times\text{aire(BDC)}\times h$.

$\text{aire(BDC)}=\frac{1}{2}\text{DB}\times\text{DC}\times\sin\widehat{\text{BDC}}$
$=\frac{1}{2}\times 9\times 6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=27.$

donc $V=27=\frac{1}{3}\times 27\times h$ d'où $h=3$.

↘ Méthode :
On pourrait aussi montrer que D appartient à Δ : ainsi, D appartient à $\mathcal{P}$ donc (AD) ⊥(AB) et D appartient à $\mathcal{P}'$ donc (AD)⊥(AC).

↘ Méthode :
La formule du volume d'un tétraèdre est :
$V=\frac{1}{3}\text{aire(base)}\times\text{hauteur}$

Conseil :
La question 1. suggère le choix de la hauteur et de la base associée.

↘ Méthode :
On utilise deux expressions du produit scalaire :
- avec les coordonnées dans un repère orthonormé,
- avec le cosinus.

↘ Méthode :
On utilise de nouveau la formule du volume d'un tétraèdre mais avec une autre hauteur et base associée.

On connaît une mesure de l'angle $\widehat{\text{BDC}}$ et les longueurs des côtés adjacents à cet angle dans BCD donc on peut calculer l'aire de BCD .