

Chapitre 11 – Evaluer ses capacités – Exercice 91

1. A a pour coordonnées $(-9; -4; -1)$ et d a pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -8 + 3t, t \in \mathbb{R} . \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9 = -7 + 2t \\ -4 = -8 + 3t \\ -1 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{4}{3} \\ t = -1 \end{cases} .$$

Ce système n'a pas de solution donc $A \notin d$.

➤ Méthode :

On montre qu'il n'existe pas de réel t pour lequel les coordonnées de A vérifient la représentation paramétrique de d .

2. a. M est un point quelconque de d de paramètre t donc

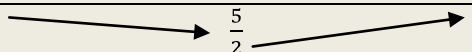
$$\begin{cases} x_M = -7 + 2t \\ y_M = -8 + 3t \\ z_M = t \end{cases} .$$

$$\begin{aligned} AM^2 &= (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 + (z_M - z_A)^2 \\ AM^2 &= (-7 + 2t + 9)^2 + (-8 + 3t + 4)^2 + (t + 1)^2 \\ AM^2 &= 14t^2 - 14t + 21 = 7(2t^2 - 2t + 3) \end{aligned}$$

➤ Méthode :

Le repère étant orthonormé, on utilise l'expression de la distance de deux points (Propriété 3 page 342)

b. f est définie sur \mathbb{R} par $f(t) = 2t^2 - 2t + 3$.
 f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout t de \mathbb{R} , $f'(t) = 4t - 2$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
f			

➤ Méthode :

La fonction f est une fonction du second degré : on peut donc aussi établir son tableau de variations directement : $a=2>0$ donc f est décroissante puis croissante et $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$ donc f atteint un minimum pour $x = \frac{1}{2}$.

Donc f est strictement décroissante sur $] -\infty; \frac{1}{2}[$ et strictement croissante sur $] \frac{1}{2}; +\infty[$.

c. On remarque que $AM^2 = 7f(t)$ d'où $AM = \sqrt{7f(t)}$.

$7 > 0$ donc la fonction $u : t \mapsto 7f(t)$ a les mêmes variations que f .

De plus, f est positive donc u aussi et \sqrt{u} a les mêmes variations que f , c'est-à-dire \sqrt{u} est strictement décroissante sur $] -\infty; \frac{1}{2}[$ et strictement croissante sur $] \frac{1}{2}; +\infty[$ et atteint un minimum pour $t = \frac{1}{2}$.

Conseil :

Revoir les propriétés sur les variations d'une fonction dans les rappels de première page 473.

Par suite, la distance AM est minimale pour $t = \frac{1}{2}$ soit pour $M = I$

$$\text{avec } \begin{cases} x_I = -7 + 2 \times \frac{1}{2} = -6 \\ y_I = -8 + 3 \times \frac{1}{2} = -\frac{13}{2} \\ z_I = \frac{1}{2} \end{cases}$$

D'où $I(-6; -\frac{13}{2}; \frac{1}{2})$.

➤ Méthode :

On relie les variations de AM à celle de la fonction f .

3. $d: \begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -8 + 3t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ donc $\vec{u}(2; 3; 1)$ est un vecteur directeur de d .

➤ Méthode :

Pour montrer que I est le projeté orthogonal de A sur d , il suffit de montrer que I appartient à d et que (IA) est orthogonale à d .

$\vec{IA}(-3; \frac{5}{2}; -\frac{3}{2})$ donc

$$\vec{IA} \cdot \vec{u} = -3 \times 2 + \frac{5}{2} \times 3 - \frac{3}{2} \times 1 = -6 + \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

d'où (IA) est orthogonale à d .

Comme de plus $I \in d$ (d'après la question 2.c), I est le projeté orthogonal de A sur la droite d .