1. $BA^2 - AA^2 = 2^2 - 0^2 = 4$ d'où $B \in \mathcal{E}$.

↘ Méthode :
On remplace M par B dans la relation qui définit $\mathcal{E}$.

2. 1$^{\text{ère}}$ méthode :

$MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) =$
$(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM})$
Or I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et donc
$MA^2 - MB^2 = (-2\overrightarrow{IM} + \vec{0}) \cdot \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$.

2$^{\text{ème}}$ méthode :
$$MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$$
$$= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 - (\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2)$$
Or I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IA}^2 = \overrightarrow{IB}^2$.
On en déduit :
$MA^2 - MB^2 = 4\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} = 4\overrightarrow{MI} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$.

↘ Méthode :
On utilise les propriétés algébriques du produit scalaire (Propriété 4 page 342).

Conseil :
Transformer les carrés de longueur (MA^2) en carrés scalaires de vecteurs ($\overrightarrow{MA}^2$) pour utiliser la relation de Chasles.

3. $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 4 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \Leftrightarrow$
$\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BM}) \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AB} = 2$
Or $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens donc
$\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{AB} = IB \times AB = 1 \times 2 = 2$ (ou d'après 1., comme $B \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{AB} = 2$)

On en déduit que
$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow 2 + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

On peut conclure que $\mathcal{E}$ est le plan passant par B et orthogonal à (AB).

↘ Méthode :
On transforme la relation :
$MA^2 - MB^2 = 4$ définissant $\mathcal{E}$ en $2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4$ à l'aide de la question 2 et on utilise la relation de Chasles pour obtenir le produit scalaire $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AB}$.

↘ Méthode :
On utilise la propriété caractéristique d'un plan (propriété 9 page 346).