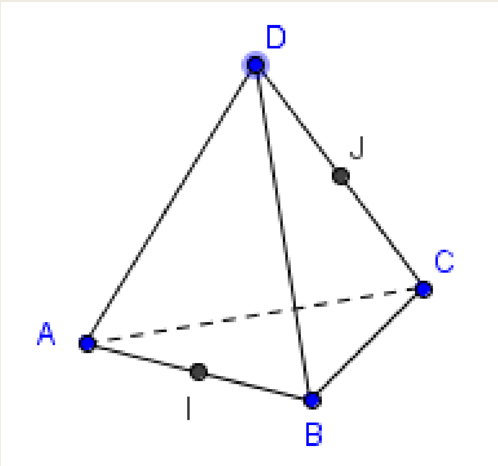
Chapitre 11 – Evaluer ses capacités – Exercice 89



1. a. On se place dans le plan (ABC) :

Le point I est le milieu de [AB] donc (CI) est la médiane passant par A du triangle équilatéral ABC donc (CI) est aussi la hauteur passant par C de ABC :

on en déduit que I est le projeté orthogonal de C sur (AB).

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI} = AB \times AI = \frac{1}{2}a^2 .$$

De même, en se plaçant dans le plan (ABD),
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI} = AB \times AI = \frac{1}{2}a^2 .$$

b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} =$
$-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = 0$.
On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux d'où (AB) et (CD) sont orthogonales.

2. a. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

b.
$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{CD} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right)\cdot\overrightarrow{CD}$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}^2$$

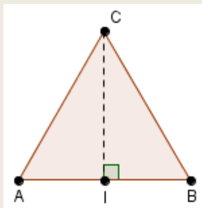
Conseil :
Faire la figure.

Le tétraèdre est régulier donc ses faces sont des triangles équilatéraux : on pourra utiliser les propriétés des triangles équilatéraux (longueurs, angles…)

Revoir les expressions du produit scalaire (page 342)

↘ Méthode :

Les points A, B et C définissent un plan, on calcule ce produit scalaire dans le plan (ABC).



On peut aussi utiliser l'expression du produit scalaire avec le cosinus (Voir exercice résolu 5 page 343).

↘ Méthode :
Les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires : on décompose le vecteur $\overrightarrow{CD}$ à l'aide de la relation de Chasles en introduisant A pour utiliser la question précédente.

↘ Méthode :
On utilise la relation de Chasles.

↘ Méthode :
On utilise la décomposition de $\overrightarrow{IJ}$ trouvée à la question précédente.

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$ d'après la question précédente,
- dans le triangle BCD, J est le projeté orthogonale de B sur [CD] donc $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{JC}\cdot\overrightarrow{CD} = -\mathrm{JC}\times\mathrm{CD} = -\frac{1}{2}a^2$
- $\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}^2 = \frac{1}{2}a^2$

donc $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{CD} = 0 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux donc (IJ) et (CD) sont orthogonales.

3. *1ère méthode :*
ACD est un triangle équilatéral donc la médiane (AJ) est aussi hauteur d'où (AJ) ⊥ (CD).

De même BCD est équilatéral donc (BJ) ⊥ (CD).

(CD) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABJ) donc (CD)⊥(ABJ).
Or (AB)⊂(ABJ) d'où (CD) est orthogonale à (AB)
et I est le milieu de [AB] donc (IJ)⊂(ABJ) d'où (CD)⊥(IJ).

2ème méthode :
Les points A et B sont équidistants de C et D car le tétraèdre ABCD est régulier.
J est équidistant de C et D car J est le milieu de [CD].
Les points A, B, J ne sont pas alignés donc (ABJ) est le plan médiateur de [CD].
On en déduit que (CD) est orthogonale à (ABJ) et on conclut comme dans la première méthode.

↘ Méthode :
Les droites (IJ) et (AB) sont incluses dans (ABJ) : il suffit de montrer que (CD) est orthogonal à (ABJ).

1ère méthode : on montre que (CD) est orthogonale à deux droites sécantes de (ABJ).

2ème méthode : on montre que (ABJ) est le plan médiateur de [CD].

.