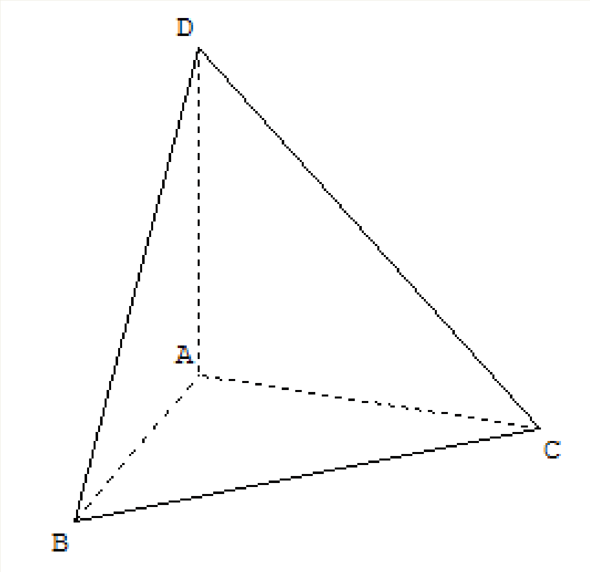
1. Voir la figure ci-dessous.



2. La hauteur issue de A du tétraèdre ABCD est AD car les triangles ABD et ACD sont rectangles en A.

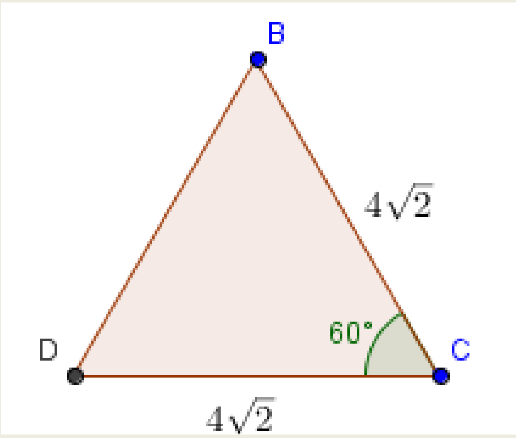
De plus, ABC est aussi un triangle rectangle en A donc l'aire de ABC est $\frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} = 8$.

On en déduit que le volume V du tétraèdre ABCD est : $V = \frac{1}{3} \times 8 \times 4 = \frac{32}{3}$.

3. Soit h la hauteur issue de A ; la base associée à cette hauteur est BCD donc le volume V du tétraèdre ABCD est aussi donné par :

$$V = \frac{1}{3}\mathrm{Aire}(\mathrm{BCD}) \times h\,.$$

Les trois triangles ABC, ABD et ACD sont rectangles et isocèles en A donc le triangle BCD est équilatéral de côté a et avec
a^2= CD^2=AD^2+AC^2=16+16=32, d'où $a = 4\sqrt{2}$.



Donc $\text{Aire(BCD)} = \frac{1}{2}\text{CD} \times \text{CB} \times \sin\left(\widehat{\text{BCD}}\right) = \frac{1}{2}\left(4\sqrt{2}\right)^2 \times \sin 60° = \frac{1}{2} \times 32 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$

Comme $V = \frac{32}{3}$ on a : $\frac{32}{3} = \frac{1}{3} \times 8\sqrt{3} \times h$ et donc $h = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Conseils

▪ On peut utiliser un repère orthonormé de l'espace et placer A à l'origine du repère et les points B, C et D sur les axes.

▪ Revoir la formule générale de l'aire d'un triangle rappelée page 479.