Déterminer une équation cartésienne de droite

Énoncé

Dans un repère du plan, on donne les points A(4 ; 0), B(2 ; – 3), $F\left(3\,;-\frac{4}{3}\right)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite *d* passant par B, de vecteur directeur $\vec{u}$.

2. Le point F appartient-il à la droite *d* ?

3. Le point A appartient-il à la droite *d* ?

Solution

1. *La droite d a été tracée à l'exercice résolu 4 page 263.*
Équation de la droite *d* passant par B, de vecteur directeur $\vec{u}$:

$M(x\,;y) \in d$ si et seulement si $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-2\\y+3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ sont colinéaires ;

si et seulement si $5(x-2)-3(y+3)=0$;

si et seulement si $5x-3y-19=0$.

$5x-3y-19=0$ est une équation cartésienne de la droite *d*.

2. $5x_F-3y_F-19=5\times 3-3\times\left(-\frac{4}{3}\right)-19=-4+4=0$

Les coordonnées de F vérifient l'équation de la droite *d* trouvée à la question **1**.
donc le point F appartient à la droite *d*.

3. $5x_A-3y_A-19=5\times 4-3\times 0-19=1$

Comme $1\neq 0$, les coordonnées de A ne vérifient pas l'équation de *d* trouvée à la question **1**, donc A n'appartient pas à la droite *d*.

MÉTHODE

Pour trouver une équation cartésienne de *d*, on peut utiliser la propriété caractéristique **6**, puis la condition de colinéarité de deux vecteurs (propriété **1**).

MÉTHODE

Pour savoir si un point appartient à la droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$, on cherche si ses coordonnées vérifient cette équation.

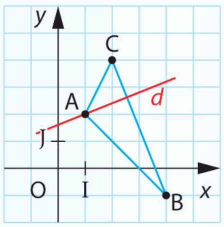
Déterminer une équation de droite à partir d'un vecteur normal

Énoncé

On considère les points A(1 ; 2), B(4 ; – 1) et C(2 ; 4) dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer une équation de la hauteur *d* issue de A dans le triangle ABC.

Solution

La droite *d* est la droite passant par A et perpendiculaire à (BC).
$\overrightarrow{BC}$ est donc un vecteur normal à *d*.



Méthode 1

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ donc *d* admet une équation

de la forme $-2x + 5y + c = 0$.

Le point A appartient à *d* donc ses coordonnées vérifient l'équation : $-2x_A + 5y_A + c = 0 \Leftrightarrow -2 + 10 + c = 0 \Leftrightarrow c = -8$.

Donc *d* a pour équation $-2x + 5y - 8 = 0$.

Méthode 2

$M(x ; y)$ appartient à *d* si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ ce qui équivaut à
$-2 \times (x - 1) + 5 \times (y - 2) = 0$ soit $-2x + 5y - 8 = 0$.

MÉTHODE

Pour écrire une équation de la droite *d* passant par A et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$:

Méthode 1 :
- écrire l'équation de *d* sous la forme $ax + by + c = 0$;
- exprimer que les coordonnées de A vérifient cette équation et en déduire *c*.

Méthode 2 :
écrire que $M(x ; y) \in d$ équivaut à $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, puis calculer $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$ avec les coordonnées.

Déterminer une équation de cercle

Énoncé

On considère les points $\Omega(1\,;-2)$, $K(3\,;-1)$, $L(-2\,;0)$ dans un repère orthonormé.
Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon 2 et du cercle $\mathscr{C}'$ de diamètre [KL].

Solution

- Équation du cercle $\mathscr{C}$:

$M(x\,;y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \Omega M = 2 \Leftrightarrow \Omega M^2 = 4$ car ΩM est positive.
$M(x\,;y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$.
Le cercle $\mathscr{C}$ a pour équation $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$.

- Équation du cercle $\mathscr{C}'$:

$M(x\,;y) \in \mathscr{C}' \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{ML} = 0$. On calcule $\overrightarrow{MK}\begin{pmatrix} 3-x \\ -1-y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ML}\begin{pmatrix} -2-x \\ -y \end{pmatrix}$.

Donc $M(x\,;y) \in \mathscr{C}' \Leftrightarrow (3-x) \times (-2-x) + (-1-y) \times (-y) = 0$.
On obtient comme équation de $\mathscr{C}'$: $x^2 + y^2 - x + y - 6 = 0$.

MÉTHODE

Pour déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$,
- de centre Ω et de rayon r, on exprime avec les coordonnées que $M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \Omega M = r \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2$
- de diamètre [AB], on exprime avec les coordonnées que :

$$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$