Calculer les côtés et les angles dans un triangle

Énoncé

Soit ABC un triangle. Peut-on calculer les longueurs de ses côtés et ses angles dans les cas suivants ?
Si oui, calculer les longueurs des côtés à 0,1 près et les angles à 1° près ; si non, expliquer pourquoi.

a. $a = 5$, $b = 7$ et $c = 10$. **b.** $c = 4$, $b = 7$, $\widehat{A} = 35°$. **c.** $\widehat{A} = 40°$ et $\widehat{B} = 55°$.

Solution

a. • Par la formule d'Al-Kashi, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$

soit $25 = 149 - 140 \cos \widehat{A}$. D'où $\cos \widehat{A} = \dfrac{124}{140}$ et $\widehat{A} \approx 28°$.

• De $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}$, on déduit $\cos \widehat{B} = \dfrac{76}{100}$ et $\widehat{B} \approx 41°$.

• De $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}$, on déduit $\cos \widehat{C} = -\dfrac{26}{70}$ et $\widehat{C} \approx 112°$.

Remarque : on peut aussi calculer $\widehat{C} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{B}) \approx 111°$.
Les résultats sont différents car ce ne sont que des valeurs approchées.

b. • On connaît les longueurs de deux côtés et l'angle déterminé par ces côtés.
On peut donc calculer le troisième côté a.
De $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$, on déduit que $a \approx 4{,}4$.

• Connaissant les trois côtés, on peut calculer les deux autres angles :
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}$, donc $\cos \widehat{B} \approx -0{,}396$ d'où $\widehat{B} \approx 113°$.
On a alors $\widehat{C} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{B})$ donc $\widehat{C} \approx 32°$.

c. On peut calculer $\widehat{C} = 180° - 40° - 55° = 85°$. En revanche, on ne peut pas calculer les côtés.
En effet, des triangles peuvent avoir leurs angles égaux tout en étant des agrandissements ou réductions les uns des autres.

MÉTHODE

Pour calculer un angle dans un triangle, on peut utiliser la formule d'Al-Kashi à condition de connaître :
- soit les longueurs des trois côtés,
- soit les longueurs de deux côtés et un angle, mais pas n'importe lequel, l'angle déterminé par les deux côtés dont on connaît les longueurs.