Calculer un produit scalaire en décomposant des vecteurs

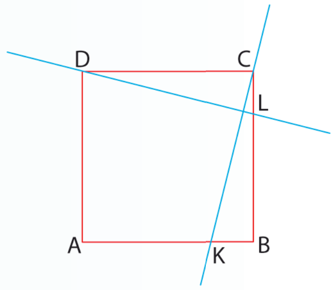
Énoncé

On considère un carré ABCD de côté 4, et les points K et L tels que $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

Décomposer $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{DL}$ sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ puis démontrer que les droites (KC) et (DL) sont orthogonales.

*Cet exercice a été résolu par une autre méthode : voir exercice résolu **3** page 313.*

Solution



- Décomposons $\overrightarrow{KC}$ sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$:

on a $\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC}$ par le relation de Chasles.

De $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, on déduit $\overrightarrow{KB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. De plus, ABCD est un carré donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

En remplaçant, on obtient $\overrightarrow{KC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

- Décomposons $\overrightarrow{DL}$ sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$:

$\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

- Calculons $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{DL}$:

$\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{DL} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$.

Par la propriété **1** (page 312), on peut développer :

$\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{DL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{1}{16}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}^2$

Or (AB) et (AD) sont perpendiculaires donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

De plus $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$ et $\overrightarrow{AD}^2 = AD^2$ (propriété **7**). On a donc $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{DL} = \frac{1}{4}AB^2 - \frac{1}{4}AD^2$.

De AB = AD, on déduit que $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{DL} = 0$.

Les droites (KC) et (DL) sont donc orthogonales.

MÉTHODE

Pour démontrer que deux vecteurs sont orthogonaux, on peut calculer leur produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en décomposant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sur deux vecteurs non colinéaires, puis en développant.

On essaie de privilégier des directions orthogonales dans la décomposition, pour que certains produits scalaires de la forme développée soient nuls.

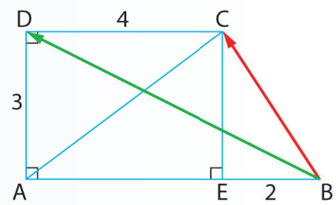
Choisir une expression adaptée du produit scalaire

Énoncé

On considère le trapèze rectangle ABCD ci-contre.

1. Calculer $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ puis $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$.

2. En déduire une mesure approchée à 0,1° près de l'angle $\widehat{CBD}$.



Solution

1. • D est le projeté orthogonal de C sur (AD) donc
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=AD^2=9.$

• De même, E est le projeté orthogonal de C sur (AB) donc
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=AB\times AE=4\times 6=24$ car $AE=CD=4$.

• $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$
$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$
Or $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=BA^2-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=36-24+9=21.$

2. Par le théorème de Pythagore, dans le triangle BAD, $BD=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$
et dans le triangle CEB, $BC=\sqrt{13}$.
On sait que $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=BC\times BD\times\cos\widehat{CBD}$. On obtient donc
$\cos\widehat{CBD}=\dfrac{21}{BC\times BD}=\dfrac{21}{3\sqrt{5}\times\sqrt{13}}$ et $\widehat{CBD}\approx 29{,}7°$ à 0,1° près.

MÉTHODE

Pour calculer un produit scalaire de deux vecteurs :
• on utilise l'une des 4 formules possibles (définition et propriétés **9**, **10** et **11**)
ou
• on décompose les vecteurs par la relation de Chasles.