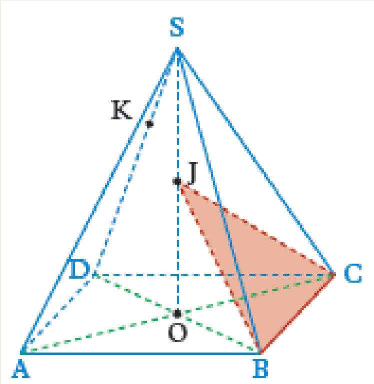
1. O, centre de la face carrée ABCD, est le milieu de [DB].
Or (DB) $\subset$ (SBD), donc O $\in$ (SBD).
Comme de plus, S $\in$ (SBD), (OS) $\subset$ (SBD).
Or J est le milieu de [OS] donc J appartient à (SBD).
$\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ donc K $\in$(SD).
Or (SD) $\subset$ (SDB) donc K $\in$(SDB).
Les points O, J et K appartiennent tous au plan (SBD) donc S, B, D, O, J et K sont coplanaires.



Montrer que des points sont coplanaires c'est montrer qu'ils sont dans un même plan. L'observation de la figure nous incite à justifier que les points O, J et K sont dans le plan (SBD).

2. a. $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SK} = -\overrightarrow{SB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$.

On connaît $\overrightarrow{SK}$ en fonction de $\overrightarrow{SD}$, d'où l'idée d'introduire le point S à l'aide de la relation de Chasles.

b. On part du second membre de l'égalité à démontrer :

$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OD}\right) = \overrightarrow{SO}$ car $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ puisque O est le milieu de [SD].

$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SJ} = -\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SO}$ car J est le milieu de [SO].

D'où $\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}\right)\right) = -\frac{3}{4}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{SD}$.

c. On remarque que $3\overrightarrow{BK} = -3\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$ et que $4\overrightarrow{BJ} = -3\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$ d'où $3\overrightarrow{BK} = 4\overrightarrow{BJ}$ soit $\overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BJ}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires, donc les points B, K et J sont alignés.

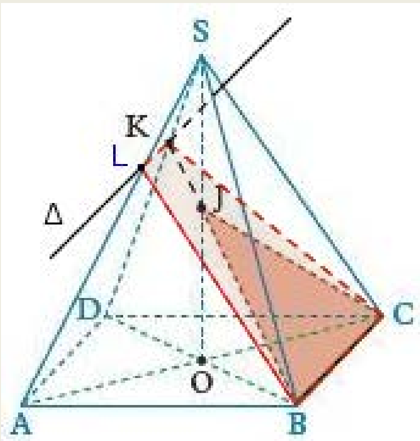
3 . a. B et C sont des points communs aux plans (BJC) et (ABC) (non confondus puisque J$\notin$ (ABC)), donc ces deux plans sont sécants suivant la droite (BC).
K$\in$(BJ) donc K $\in$(BJC).
K et C sont donc communs aux plans (BJC) et (SDC).
Les plans (BJC) et (SDC) (non confondus car B$\notin$(SDC)), sont donc sécants suivant la droite (KC).

Des plans non confondus dont on connaît deux points communs sont sécants suivant la droite passant par ces deux points.

b. K est un point commun aux plans (BJC) et (SDA). Ces deux plans ne sont pas confondus car B $\notin$(SDA), ils sont donc sécants suivant une droite Δ passant par K.

Or ABCD est un carré donc (AD) droite de (SDA) et (BC) droite de (BJC) sont parallèles. On en déduit, d'après le théorème du toit, que Δ est parallèle à (AD) (et à (BC)).

c. Soit L le point d'intersection de Δ et de [SA]. La section de la pyramide par (BJC) est le quadrilatère BCKL.



Remarque
Comme Δ = (KL) est parallèle à (BC), la quadrilatère BCKL est un trapèze.