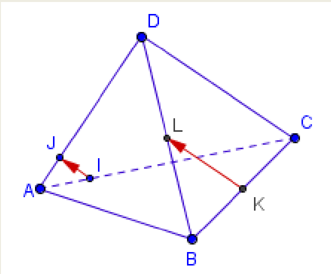
Chapitre 10 – Evaluer ses capacités – Exercice 79

Conseil :
Commencer par construire la figure à compléter au cours de l'exercice.



1. Par le calcul vectoriel

a. La figure nous suggère que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ ont tous deux colinéaires à $\overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CD}$

et $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

donc $\overrightarrow{CD} = 5\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{KL}$ donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{KL}$.

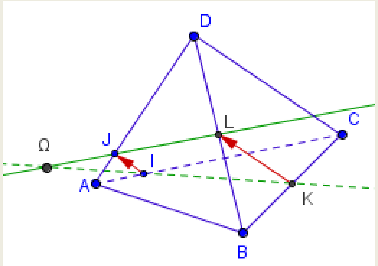
↘ Méthode :
Deux droites parallèles sont coplanaires.

Deux droites sont sécantes si et seulement si elles sont coplanaires et non parallèles

b. $\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{KL}$ donc les droites (IJ) et (KL) sont parallèles donc les points I, J, K, L sont coplanaires donc les droites (KI) et (LJ) sont coplanaires.

De plus, IJLK est un trapèze dont les bases [IJ]et [KL] n'ont pas la même longueur donc IJKL n'est pas un parallélogramme.

On en déduit que les droites (KI) et (JL) sont coplanaires et non parallèles donc (KI) et (LJ) sont sécantes en un point nommé Ω.



↘ Méthode :
On détermine deux plans contenant les droites (KI) et (LJ) : l'intersection des deux droites appartient à l'intersection des deux plans.

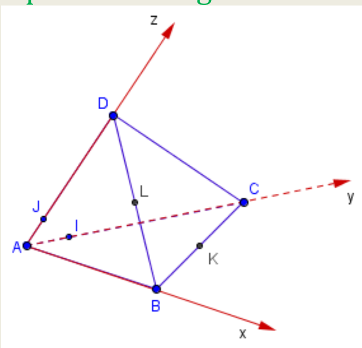
c. $\Omega \in$ (KI) et (KI) $\subset$ (ABC) donc $\Omega \in$ (ABC) ;
$\Omega \in$ (JL) et (JL) $\subset$ (ABD) donc $\Omega \in$ (ABD).

Ω est donc un point commun aux plans (ABC) et (ABD) qui sont sécants suivant la droite (AB) d'où $\Omega \in$ (AB) et les points A, B, Ω sont alignés.

2. Avec les coordonnées

a. ABCD est un tétraèdre donc les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires et $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère de l'espace.

Conseil :
Faire apparaitre les axes du repère sur la figure.



Dans ce repère,:
A(0 ;0 ;0) ; B(1 ;0 ;0) ; C(0 ;1 ;0) ; D(0 ;0 ;1)

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ donc $I\left(0; \frac{1}{5}; 0\right)$;

$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$ donc $J\left(0; 0; \frac{1}{5}\right)$;

K est le milieu de [BC] donc $K\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

L est le milieu de [BD] donc $L\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$.

b. $\overrightarrow{KI}\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{10}; 0\right)$ donc $\vec{u}(5; 3; 0)$ est un vecteur directeur de (KI) et $K\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ est un point de (KI) donc une représentation paramétrique de (KI) est : $\begin{cases} x = 5t + \frac{1}{2} \\ y = 3t + \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

$\overrightarrow{LJ}\left(-\frac{1}{2}; 0; -\frac{3}{10}\right)$ donc $\vec{v}(5; 0; 3)$est un vecteur directeur de (LJ) et $L\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$ est un point de (LJ) donc une représentation paramétrique de (LJ) est : $\begin{cases} x = 5t' + \frac{1}{2} \\ y = 0 \\ z = 3t' + \frac{1}{2} \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$

↘ Méthode :
On détermine un point et un vecteur directeur de chaque droite et on applique la propriété 12 page 316.

Conseils :
Choisir un vecteur directeur à coordonnées entières.

Utiliser des paramètres différents (t et t') pour les droites (KI) et (LJ).

c. M(x ;y ;z) appartient à (KI) et (LJ) ⇔ il existe deux réels t et t' tels que $\begin{cases} x = 5t + \frac{1}{2} \\ y = 3t + \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 5t' + \frac{1}{2} \\ y = 0 \\ z = 3t' + \frac{1}{2} \end{cases}$

On doit donc résoudre : $\begin{cases} 5t + \frac{1}{2} = 5t' + \frac{1}{2} \\ 3t + \frac{1}{2} = 0 \\ 0 = 3t' + \frac{1}{2} \end{cases}$ ce qui équivaut à

$\begin{cases} t = t' \\ t = -\frac{1}{6} \\ t' = -\frac{1}{6} \end{cases}$ c'est-à-dire $t = t' = -\frac{1}{6}$.

↘ Méthode :
Les coordonnées du point d'intersection doivent vérifier les représentations paramétriques de (KI) et de (LJ).

On obtient un système de trois équations à deux inconnues.

On détermine t et t' à l'aide de la deuxième et de la troisième équation et on vérifie la première équation.

Les réels $t = -\frac{1}{6}$ et $t' = -\frac{1}{6}$ vérifient le système donc on en déduit que les droites (KI) et (LJ) sont sécantes en un point nommé Ω.
En remplaçant *t* par $-\frac{1}{6}$ dans la représentation paramétrique de (KI) ou t' par $-\frac{1}{6}$ dans celle de (LJ), on déduit que les coordonnées de Ω : $\left(-\frac{1}{3}; 0 ; 0\right)$.

d. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(1; 0; 0)$ et $\overrightarrow{\mathrm{A\Omega}}\left(-\frac{1}{3}; 0; 0\right)$ donc $\overrightarrow{\mathrm{A\Omega}} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{A\Omega}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont colinéaires et donc les points A, B et Ω sont alignés.

.