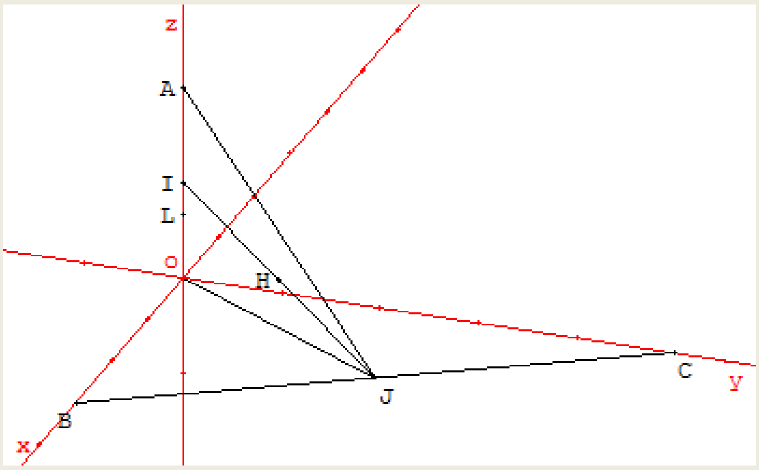
Chapitre 10 – Evaluer ses capacités – Exercice 77

1. Construction de la figure



↘ Méthode :
On place les points A, B, C, L qui sont sur les axes du repère, puis on trace les segments [OA] et [BC] pour placer I et J puis le segment [IJ] pour placer H.

2. a. I est le milieu de [OA] or $O(0;0;0)$ et $A(0;0;2)$ donc $I(0;0;1)$.
J est le milieu de [BC] or $B(3;0;0)$ et $C(0;5;0)$ donc $J(\frac{3}{2};\frac{5}{2};0)$.
H est le milieu de [IJ] donc $H(\frac{3}{4};\frac{5}{4};\frac{1}{2})$.

↘ Méthode :
On utilise la propriété sur le calcul des coordonnées d'un milieu.

b. $\overrightarrow{LH} = \overrightarrow{LO} + \overrightarrow{OH}$.

On a : $\overrightarrow{OA}(0;0;2)$ et $\overrightarrow{OL}\left(0;0;\frac{2}{3}\right)$ donc $\overrightarrow{OL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$
donc $\overrightarrow{LH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH}$.

De plus, $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JH} = \overrightarrow{OJ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{OJ} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{JO} + \overrightarrow{OI})$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{OJ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OJ} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$.

On en déduit que :
$\overrightarrow{LH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OJ} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{12}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OJ}$.

Conseil :
Utiliser la figure pour choisir les points à introduire dans la relation de Chasles.

↘ Méthode :
On introduit en premier lieu O car $\overrightarrow{LO}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OA}$.

On décompose $\overrightarrow{OH}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ puis en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OJ}$ ($\overrightarrow{OI}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OA}$).

c. $\overrightarrow{\mathrm{LH}} = -\frac{1}{12}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{LH}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ sont coplanaires.

Comme $\overrightarrow{\mathrm{LH}}$ est un vecteur directeur de (LH) et $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (OAJ), on en déduit que la droite (LH) est parallèle au plan (OAJ).

Comme L est un point de (OA) , L est aussi un point de (OAJ) et on en conclut que (LH) est incluse dans (OAJ).

↘ Méthode :
Pour montrer qu'une droite est incluse dans un plan, il suffit de montrer qu'elle est parallèle au plan avec un point commun

d. Les droites (LH) et (OJ) sont coplanaires car incluses dans (OAJ).

De plus, $\overrightarrow{\mathrm{LH}} = -\frac{1}{12}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$.
Si (LH) et (OJ) sont parallèles, $\overrightarrow{\mathrm{LH}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ sont colinéaires et il existe un réel k tel que $\overrightarrow{\mathrm{OJ}} = k\overrightarrow{\mathrm{LH}}$.
On a alors $\overrightarrow{\mathrm{LH}} = -\frac{1}{12}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}k\overrightarrow{\mathrm{LH}}$ soit $\left(1-\frac{1}{2}k\right)\overrightarrow{\mathrm{LH}} = -\frac{1}{12}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$
Ce qui est impossible puisque $\overrightarrow{\mathrm{LH}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ ne sont pas colinéaires.

On en déduit que (LH) et (OJ) ne sont pas parallèles donc elles sont sécantes.

↘ Méthode :
Les droites (LH) et (OJ) sont coplanaires d'après la question précédente donc elles ne peuvent être que parallèles ou sécantes.

.