Pré-requis : Caractérisation vectorielle d'une droite

M appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

Conseil :
Revoir la propriété 5 page 310

1. ROC. M(x ;y ;z) ∈ d ⇔ $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

⇔ $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$ ⇔ $\begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

d est donc l'ensemble des points M de coordonnées
$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

↘ Méthode :
La propriété : « deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées » permet de transformer l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ en u système sur les coordonnées.

2. Application

a. La droite Δ passe par A$(6; 1; 1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(1; 2; -1)$ donc une représentation paramétrique de Δ est : $\begin{cases} x = 6 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

De même Δ′ : $\begin{cases} x = 3 - t' \\ y = -3 + t' \\ z = -6 + 2t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$

↘ Méthode :
Pour obtenir une représentation paramétrique de Δ, on remplace $(x_0; y_0; z_0)$ par les coordonnées de A soit $(6; 1; 1)$ et $(a; b; c)$ par celles de $\vec{u}$ soit $(1; 2; -1)$.
De même pour Δ′.

Conseil :
Utiliser des paramètres différents (t et t') pour les droites Δ et Δ′.

b. C ∈ Δ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x_C = 6 + t \\ y_C = 1 + 2t \\ z_C = 1 - t \end{cases}$ et

D ∈ Δ′ donc il existe $t' \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x_D = 3 - t' \\ y_D = -3 + t' \\ z_D = -6 + 2t' \end{cases}$

↘ Méthode :
On exprime les coordonnées de C en fonction d'un paramètre t et celle de D en fonction d'un paramètre t'.

Math'x Terminale S © Éditions Didier 2012

De plus I$(1\,;-2\,;3)$ est le milieu de [CD] si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{x_C+x_D}{2} = 1 \\ \frac{y_C+y_D}{2} = -2 \\ \frac{z_C+z_D}{2} = 3 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_C + x_D = 2 \\ y_C + y_D = -4 \\ z_C + z_D = 6 \end{cases}$$

On utilise la propriété sur le calcul des coordonnées d'un milieu.

On cherche donc t et t' tels que

$$\begin{cases} 3 + t + 6 - t' = 2 \\ 1 + 2t - 3 + t' = -4 \\ 1 - t - 6 + 2t' = 6 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} t - t' = -7 \\ 2t + t' = -2 \\ -t + 2t' = 11 \end{cases} \text{ c'est-à-dire}$$

On obtient un système de trois équations à deux inconnues.

$$\begin{cases} t = t' - 7 \\ 2t' - 14 + t' = -2 \\ -t + 2t' = 11 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} t = t' - 7 \\ 3t' = 12 \\ -t + 2t' = 11 \end{cases} \text{ ce qui donne}$$

On détermine t et t' à l'aide des deux premières équations et on vérifie la troisième équation.

$$\begin{cases} t = -3 \\ t' = 4 \\ -3 + 8 = 11 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} t = -3 \\ t' = 4 \end{cases}$$

Avec $t = -3$, on obtient C$(3\,;-5\,;4)$ et avec $t' = 4$, on obtient D$(-1\,;1\,;2)$.

Pour obtenir les coordonnées de C, on remplace t par -3 dans la représentation paramétrique de Δ. De même pour D.

Les valeurs de t et t' étant uniques, on en déduit qu'il existe un unique point C$(3\,;-5\,;4)$ de Δ et un unique point D$(-1\,;1\,;2)$ de Δ' tel que I soit le milieu de [CD].

.