

Chapitre 10 - Aide - Exercice 3 Question 2

Choisir un repère pour résoudre un problème

Énoncé

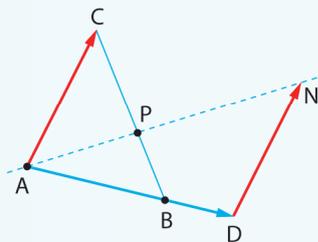
L'objectif est d'étudier une autre méthode pour résoudre l'exercice résolu 7 page 267.

A, B, C sont trois points non alignés. Les points N et P sont tels que $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

- Faire une figure.
- Expliquer pourquoi $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan.
- Quelles sont les coordonnées des points A, B, C et N dans ce repère ?
- Calculer les coordonnées du point P.
- Montrer que les points A, P et N sont alignés.

Solution

a.



- A, B, C sont trois points non alignés donc $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan.
- Dans ce repère : A(0 ; 0) (origine du repère), B(1 ; 0), C(0 ; 1) et $N(\frac{3}{2}; 1)$ car $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
- Pour trouver les coordonnées de P, on utilise la relation $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BP} \begin{pmatrix} x_P - 1 \\ y_P \end{pmatrix}; \text{ d'autre part } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Dans un repère, deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.

$$\overrightarrow{BP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} \text{ équivaut à } \begin{cases} x_P - 1 = -\frac{2}{5} \\ y_P = \frac{2}{5} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_P = \frac{3}{5} \\ y_P = \frac{2}{5} \end{cases} \text{ d'où } P(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}).$$

- On calcule les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AP} et \overrightarrow{AN} et on conclut en utilisant la condition de colinéarité de deux vecteurs dans un repère.

$$\overrightarrow{AP} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AN} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{3}{5} \times 1 - \frac{2}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} = 0$$

Par conséquent, les vecteurs \overrightarrow{AP} et \overrightarrow{AN} sont colinéaires et donc les points A, P et N sont alignés.

MÉTHODE

Pour déterminer les coordonnées d'un point défini par une égalité vectorielle, on traduit cette égalité par un système que l'on résout.

Conseil

Bien faire le lien entre

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

trouvé dans l'exercice résolu 7 et

$$P(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}) \text{ dans le repère } (A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

Ce sont deux façons de dire la même chose !

MÉTHODE

Pour chercher si les points A, P et N sont alignés, on cherche si les vecteurs \overrightarrow{AP} et \overrightarrow{AN} sont colinéaires. Pour cela, on peut calculer leurs coordonnées dans un repère.