

Chapitre 10 - Aide - Exercice 3 Question 1

■ Décomposer un vecteur sur deux vecteurs non colinéaires

Énoncé

A, B, C sont trois points non alignés. Les points N et P sont tels que $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

1. Faire une figure.

2. a. Décomposer le vecteur \overrightarrow{AP} sur les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

b. En déduire que les vecteurs \overrightarrow{AP} et \overrightarrow{AN} sont colinéaires.

Qu'en déduit-on pour les points A, P et N ?

Solution

2. a. On décompose le vecteur \overrightarrow{AP} à l'aide de la relation de Chasles en intercalant le point B puisque l'on connaît \overrightarrow{BP} : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$.

Or $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$, d'où $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

On cherche à exprimer le vecteur \overrightarrow{AP} en fonction des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} donc on introduit le point A : on écrit $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ à l'aide de la relation de Chasles. Comme $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, on obtient :

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}.$$

b. D'après l'énoncé, on a : $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

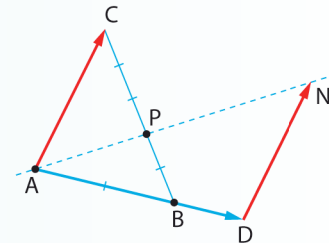
et d'après a : $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

On remarque que $2\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ et que $5\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

On a donc $2\overrightarrow{AN} = 5\overrightarrow{AP}$ soit $\overrightarrow{AN} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AP}$.

On en déduit que les vecteurs \overrightarrow{AP} et \overrightarrow{AN} sont colinéaires et donc les points A, P et N sont alignés.

Une autre solution est proposée à l'exercice résolu 9.



Conseil

- On cherche à utiliser les relations données par l'énoncé : le point B n'est pas introduit au hasard à l'aide de la relation de Chasles mais parce que \overrightarrow{BP} est donné dans l'énoncé.
- On introduit ensuite le point A pour faire apparaître les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} comme demandé dans l'énoncé.