Des fonctions continues partout mais dérivables nulle part

Les réponses seront données par lecture graphique.

1. a. Créer sur GeoGebra la fonction f définie par $f(x) = 2x$ si $x \leq \frac{1}{2}$ et $f(x) = 2 - 2x$ si $x > \frac{1}{2}$.

b. Cette fonction est-elle continue sur R ? Est-elle dérivable sur R ?

2. a. Créer sur GeoGebra la fonction définie par $g(x) = f(x - E(x))$ où E(x) désigne la partie entière de x. Expliquer l'allure de la courbe.

Saisie: `g(x)=f(x-floor(x))`

b. Cette fonction est-elle continue sur R ? Est-elle dérivable sur R ?

3. On considère pour tout entier $n \geq 0$, la fonction h_n définie sur R par $h_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g(2^k x)}{2^k}$.

a. Quelle est la fonction h_0 ? Ecrire $h_1(x)$ et $h_2(x)$ sans le symbole Σ.

b. Sur GeoGebra, créer un curseur n qui varie de 0 à 10 et ne prend que des valeurs entières. Régler n à 0. Ne plus faire afficher les courbes représentant les fonctions f et g.

b. Créer la fonction h_n par l'instruction :

Saisie: `h_n(x)= Somme[Séquence[g(2^k x) / 2^k, k, 0, n], n + 1]`

4. a. La fonction h_0 est-elle continue sur [0 ; 1] ? En combien de réels de [0 ; 1] n'est-elle pas dérivable ?

b. Régler n à 1 et reprendre la question a pour h_1. Puis pour h_2, h_3, h_4, h_5.

c. Observer les courbes représentant les fonctions h_6, … h_{10}. Quelle conjecture peut-on faire sur la continuité de la fonction h_n sur [0 ; 1] ? Sur les réels de [0 ; 1] où h_n n'est pas dérivable ?

Et en allant plus loin …

Le graphique ci-contre est obtenu sur Xcas pour n = 35.
Plus n augmente, plus on constate de problèmes de dérivabilité ; la fonction reste pourtant continue sur [0 ; 1].
Quand n tend vers + ∞, on peut imaginer que l'on obtient comme « limite » une fonction continue sur R mais dérivable nulle part.
On ne peut bien sûr pas la représenter graphiquement.