Chapitre 9 – Corrigé détaillé – Objectif Bac

1. a. Solution 1 :
On vérifie que j est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$,
c'est à dire que $j^2 + j + 1 = 0$.

$j^2 = \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}^2\frac{3}{4}$.

Donc $j^2 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Par suite, $j^2 + j + 1 = 0$.

Solution 2 :
L' équation $z^2 + z + 1 = 0$ est une équation du second degré à coefficients réels, donc on sait la résoudre.

Son discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$.
Cette équation a donc deux solutions complexes conjuguées :
$-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, c'est-à-dire j
et son conjugué $\bar{j} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Donc j est bien solution de l'équation.

Aide
Dire que j est solution d'une équation $f(z) = 0$, c'est dire que $f(j) = 0$.
On peut donc calculer simplement $f(j)$ et vérifier qu'il est nul, sans chercher à résoudre l'équation $f(z) = 0$.
Ici, pour une équation du second degré que l'on sait résoudre à l'aide de formules, les deux méthodes sont disponibles.

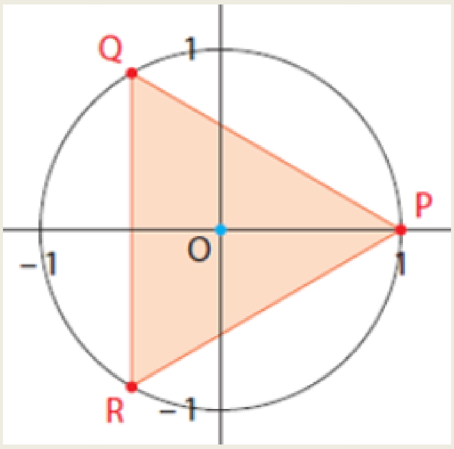
b. Calcul de j^3
On détermine la forme exponentielle de j : on a $|j| = 1$.
Si $\arg(j) = \alpha$, alors $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Donc $j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et, par conséquent : $j^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{3}} = 1$.

Vérifiions que $j^2 = -j - 1$.
On sait que $j^2 + j + 1 = 0$, par la question 1,
donc $j^2 = -j - 1$.

Conseil
Pour calculer une puissance d'un nombre complexe d'exposant au moins 3, la forme exponentielle est en général plus adaptée que la forme algébrique.

Remarque
En connaissant bien les valeurs remarquables des cosinus et sinus, on peut aussi reconnaître directement que
$j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, ce qui s'écrit aussi $j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

c. On place les points dans un repère.



Le triangle PQR semble équilatéral, démontrons-le :

Q et R ont des affixes conjuguées donc sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
P appartenant à cet axe, [PQ] et [PR] sont symétriques par rapport à cet axe, donc PQ = PR.
En outre :

$\mathrm{PQ} = |j-1| = \left|-\frac{3}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{3}.$

De même QR = $\sqrt{3}$ donc PQ = QR.

On a donc PQ = PR = QR.
Le triangle PQR est bien équilatéral.

Remarque
Une autre solution, sans calcul repose sur :
- la symétrie axiale comme ci-contre pour montrer que PQ = PR donc que PQR est isocèle,
- la propriété de l'angle inscrit et de l'angle au centre vue en classe de 3e :

$$\widehat{\mathrm{POQ}} = 2\,\widehat{\mathrm{PRQ}}.$$

Or $\arg(j) = \frac{2\pi}{3}$ donc $\widehat{\mathrm{POQ}} = \frac{2\pi}{3}$ et $\widehat{\mathrm{PRQ}} = \frac{\pi}{3}$.
Le triangle isocèle PQR admet un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ donc ses deux autres angles mesurent également $\frac{\pi}{3}$.
Il est équilatéral.

2. a. Par hypothèse, $a = -bj - cj^2$ donc
$a - c = -bj - cj^2 - c = -bj + c(-j^2 - 1).$

Puisque $j^2 + j + 1 = 0$, on a $-j^2 - 1 = j$.
En remplaçant dans $a - c$, on obtient :

Aide
Pour déduire d'une égalité entre nombres complexes des renseignements sur des longueurs, il faut s'intéresser aux modules des deux membres.

$a - c = -bj + cj$.
En factorisant par j, on obtient bien :
$a - c = j(c - b)$.

Par conséquent, $|a - c| = |j(c - b)|$
donc $|a - c| = |j||c - b|$
donc $|a - c| = |c - b|$.
On en déduit que AC = BC.

b. De la même façon,
$a - b = -bj - cj^2 - b = b(-j - 1) - cj^2$.
Comme $j^2 = -1 - j$, alors :

$$a - b = bj^2 - cj^2 = j^2(b - c).$$

$|a - b| = |j^2(b - c)|$ donc $|a - b| = |j^2||b - c|$
donc $|a - b| = |b - c|$.
Par conséquent, AB = BC.

c. De AC = BC puis AB = BC, on déduit que ABC est un triangle équilatéral.