Chapitre 8 – Corrigé détaillé – Objectif Bac

A.1.
Limite en $+\infty$:
$f(x)$ est le produit de deux facteurs qui ont pour limite $+\infty$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Limite en $-\infty$:
On a $f(x) = xe^x + e^x$ avec, par propriété $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$
et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

2. $f(x)$ est de la forme $u(x)v(x)$ avec $u(x) = x + 1$ et $v(x) = e^x$.
Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f également
et $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1\times e^x + (x+1)e^x$
donc $f'(x) = (x+2)e^x$.

Remarque
Par théorème d'opérations, la recherche de la limite de f en $-\infty$ conduit à une forme indéterminée.
On transforme donc $f(x)$, en développant, pour faire apparaître la limite indéterminée connue : $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

3. Le sens de variation de f est donné par le signe de sa dérivée.
Comme $e^x > 0$ pour tout réel x, $f'(x)$ a même signe que $x + 2$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Conseil

Bien vérifier la cohérence dans le tableau entre le sens de variation et les limites trouvées en question 1.

B. 1. a.

$g_m(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = me^{-x}$

$\Leftrightarrow x + 1 = \frac{m}{e^x}$ car $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

Comme $e^x \neq 0$,
$g_m(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)e^x = m$

$\Leftrightarrow f(x) = m$.

Note

Pour démontrer cette équivalence, on peut partir, au choix de $g_m(x) = 0$ ou de $f(x) = m$.
L'essentiel est de bien garder des équivalences tout au long des transformations effectuées.

b. Le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_m$ avec l'axe des abscisses est le nombre de solutions de l'équation $g_m(x) = 0$.
On déduit de la partie A. que :
si $m < - e^{-2}$: il n'y a aucun point d'intersection,

si $m = - e^{-2}$: il y a un seul point d'intersection,

si $– e^{-2} < m < 0$: il y a deux points d'intersection,

si $m \geq 0$: il y a un seul point d'intersection.

Remarque
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable sur $\mathbb{R}$.
C'est le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie de f sur $]-\infty ; -2]$ et sur $[-2 ; +\infty[$ qui permettraient de justifier ces résultats.

2. Pour $m = - e$, on a $m < - e^{-2}$ donc la courbe correspondante ne coupe pas l'axe des abscisses.
La courbe 2 est la seule qui convienne.

Pour $m = 0$, on a $g_0(x) = x + 1$ donc g_0 est une fonction affine représentée par la droite d'équation $y = x + 1$.
Seule la courbe 1 convient.

Par conséquent la courbe 3 correspond à $m = e$.

Conseil

On peut tracer les courbes $\mathcal{C}m$ pour ces trois valeurs de m sur la calculatrice pour contrôler ces résutlats.

3. Pour étudier la position de $\mathcal{C}_m$ par rapport à d, on étudie le signe de $g_m(x) - (x + 1) = - me^{-x}$.

Comme $e^t > 0$ pour tout réel t, on a $e^{-x} > 0$ pour tout réel x. De ce fait $g_m(x) - (x + 1)$ a même signe que $-m$.

Par suite,
si $m < 0$, $g_m(x) - (x + 1) > 0$, donc $\mathcal{C}_m$ est au-dessus de d.

Si $m < 0$, $g_m(x) - (x + 1) < 0$ donc $\mathcal{C}_m$ est en-dessous de d.

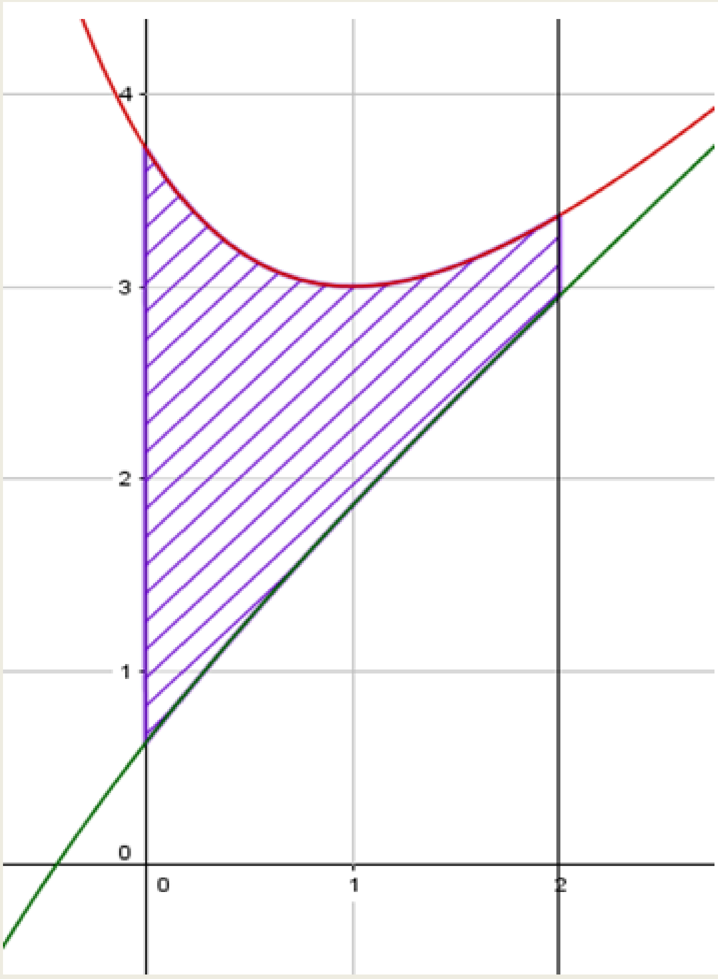
On a déjà vu que si $m = 0$, $\mathcal{C}_m$ est confondue avec d.

Aide

La position d'une courbe $\mathcal{C}_f$ représentant une fonction f par rapport à une courbe $\mathcal{C}_g$ représentant une fonction g est donnée par le signe de $f(x) - g(x)$.

En effet :
- si $f(x) - g(x) > 0$ sur un intervalle I, alors $f(x) > g(x)$ sur I donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur I.
- Si $f(x) - g(x) < 0$ sur I alors $f(x) < g(x)$ sur un intervalle I donc $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur I.

4. a. Partie $\mathcal{D}_2$ hachurée :



b. Par les résultats de la question B.3, on sait que $\mathcal{C}_{-e}$ est au-dessus de d, qui est elle-même au-dessus de $\mathcal{C}_e$.
Par suite, $\mathcal{C}_{-e}$ est au-dessus $\mathcal{C}_e$.
En outre, g_m est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout m donc $g_{-e} - g_e$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'aire $\mathcal{A}(a)$ se calcule en unité d'aire par :
$\mathcal{A}(a) = \int_0^a (g_{-e}(x) - g_e(x))\, dx = \int_0^a 2e \times e^{-x} dx$.

Donc $\mathcal{A}(a) = 2e\,[-e^{-x}]_0^a = 2e\,(-e^{-a} + 1) = 2e - 2e^{1-a}$.

Par théorème d'opérations, on déduit que la limite de $\mathcal{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$ est 2e.

Conseil

Pour exprimer par une intégrale la mesure de l'aire comprise entre deux courbes, ici $\mathcal{C}_e$ et $\mathcal{C}_{-e}$, il faut connaître la position relative de ces deux courbes.