Chapitre 7 – Corrigé détaillé – Objectif Bac

1. L'équation (E_1) est à l'inconnue $x > 0$ donc on peut diviser chaque membre par x^2, non nul sans en changer les solutions, c'est-à-dire en obtenant une nouvelle équation équivalente, qui n'est autre que (E_2).

Ainsi (E_1) est équivalente à (E_2).

Conseil

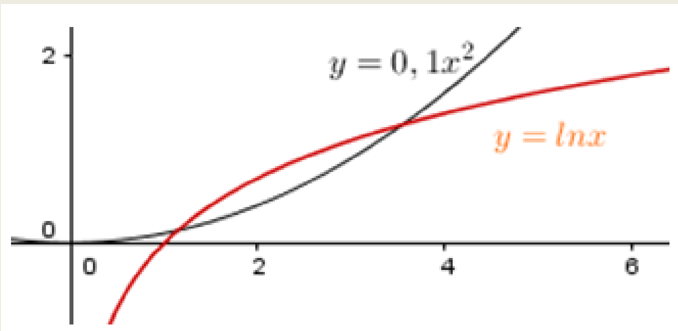
Le passage de (E_1) à (E_2) est assez évident, il ne faut pas oublier cependant de justifier que ces équations sont équivalentes.

2. Conjecture

On peut commencer par conjecturer graphiquement la réponse.
Ceci peut s'effectuer sur l'équation (E_1) ou sur l'équation (E_2).

- Avec l'équation (E_1) :

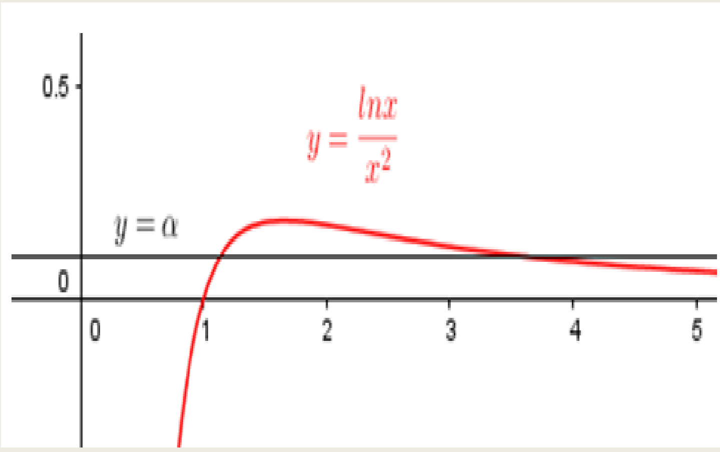
Comme $\alpha > 0$, la parabole $\mathcal{P}_\alpha$ d'équation $y = \alpha x^2$ est « tournée vers les y positifs ».
Sur un graphique, on se rend compte que $\mathcal{P}_\alpha$ doit être « très évasée » pour couper deux fois la courbe $\Gamma : y = \ln x$.
Ceci signifie que α doit être « petit ».



Remarque

Une conjecture n'est pas indispensable, mais elle permet d'avoir une idée du résultat cherché et de contrôler les résultats des calculs.
Ici, les courbes d'équation $y = \alpha x^2$ et $y = \ln x$, on peut émettre une conjecture en partant de l'équation (E_1).
D'une façon générale, une conjecture est simple à émettre sur une équation du type $f(x) = k$ avec k constante, comme l'est (E_2), car il s'agit de chercher les points d'intersection de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = k$ selon les valeurs de k.

• Avec l'équation (E_2) :
Pour que la droite d'équation $y = \alpha$ soupe deux fois la courbe d'équation $y = \frac{\ln x}{x^2}$ il faut que α soit assez petit, compris entre 0 et 0,2 environ.



Aide

Trouver le nombre de solutions d'une équation du type $\phi(x) = \alpha$, sans résoudre cette équation, fait appel au théorème des valeurs intermédiaires. Il va donc falloir étudier la fonction ϕ et dresser son tableau de variations complet.
La question 1 guide vers cette solution. Si cette question n'avait pas été posée, il aurait pu falloir prendre l'initiative de se ramener à une équation de cette forme.

Démonstration

Soit ϕ la fonction définie sur] 0 ; +∞[par $\phi(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

• Sens de variation de ϕ :
Il est donné par le signe de sa dérivée.
$\phi(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = \ln x$ et $v(x) = x^2$.
ϕ est dérivable sur] 0 ; +∞[avec

$$\phi'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4}.$$

Pour étudier le signe de $\phi'(x)$, on factorise son numérateur :
$\phi'(x) = \frac{x(1-2\ln x)}{x^4}$.
Comme $x > 0$, et $x^4 > 0$, $\phi'(x)$ est du signe de $1 - 2 \ln x$.

Or $1 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 0 < x < e^{\frac{1}{2}}$

et $1 - 2\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$.

Donc ϕ est strictement croissante sur $]0 ; e^{\frac{1}{2}}]$ et strictement décroissante sur $[e^{\frac{1}{2}} ; +\infty[$.

Conseil

Contrôler que le sens de variation trouvé est cohérent avec l'allure de la courbe représentant la fonction ϕ.

• Limites de ϕ :

- en 0 : $\phi(x) = \frac{1}{x^2} \times \ln x$ avec $\frac{1}{x^2}$ qui tend vers + ∞ et $\ln x$ vers -∞.

Donc $\phi(x)$ tend vers -∞ par théorèmes d'opérations.

Conseil

Contrôler la cohérence entre les limites trouvées et l'allure de la courbe, même si ce n'est pas une preuve …

- en $+\infty$: $\phi(x) = \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x}$ où par propriété,
$\frac{\ln x}{x}$ a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$.
Les deux facteurs du produit $\frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x}$ tendent vers 0 donc $\phi(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

• Tableau de variations :

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$\phi'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$\phi(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0

Conseil

Bien vérifier la cohérence entre le sens de variation et les limites.

• Interprétation :

On sait que $\alpha > 0$.
La fonction ϕ est continue car dérivable sur $]\,0\,;+\infty[$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\phi(x) = \alpha$, soit encore l'équation (E_1) a deux solutions distinctes si et seulement si $0 < \alpha < \frac{1}{2e}$.

Note

Avec $\frac{1}{2e} \approx 0{,}18$ on retrouve bien la conjecture émise au début de la recherche.