Chapitre 6 – Corrigé détaillé – Objectif Bac

A.1. a. Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, le coefficient directeur de la tangente d à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a est $f'(a)$.
Or $f(x) = e^x$ donc pour tout x réel, $f'(x) = e^x$.
Par conséquent $f'(a) = e^a$.

b. De même, le coefficient directeur de la tangente d à $\mathcal{C}_g$ au point B d'abscisse b est $g'(b)$.
Comme $g(x) = 1 - e^{-x}$, on a $g'(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$
donc $g'(b) = e^{-b}$.

Ces deux tangentes étant confondues, elles doivent avoir même coefficient directeur, donc $e^a = e^{-b}$.
On en déduit que $a = -b$.

Attention !
$e^{-x} = e^{u(x)}$.
Ne pas oublier le signe – en dérivant :
$u'(x)e^{u(x)} = -e^{-x}$.

2. Une équation de d est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
soit $y = e^a(x - a) + e^a$.
En développant, on obtient pour équation de d :
$y = e^a x - ae^a + e^a$.

Une équation de d' est $y = g'(b)(x - b) + g(b)$
soit $y = e^{-b}(x - b) + 1 - e^{-b}$.
ou encore $y = e^{-b}x - be^{-b} + 1 - e^{-b}$.
On peut encore l'exprimer en fonction de a en remplaçant b par $-a$:
$y = e^a x + ae^a + 1 - e^a$.

Ces deux tangentes étant confondues, elles doivent avoir même ordonnée à l'origine,
c'est-à-dire : $-ae^a + e^a = ae^a + 1 - e^a$.
Ce qui s'écrit encore $2ae^a - 2e^a + 1 = 0$.
Puis, en factorisant : $2(a - 1)e^a + 1 = 0$.

Ceci signifie bien que a est solution de l'équation : $2(x - 1)e^x + 1 = 0$.

Logique
Avoir le même coefficient directeur est une condition nécessaire pour que ces deux droites soient confondues, mais pas suffisante.
Pour que ces deux droites soient bien confondues il faut et il suffit qu'elles aient le même coefficient directeur **ET** qu'elles passent par un point commun.
En exprimant qu'elles ont la même ordonnée à l'origine, on exprime qu'elles passent par le même point d'abscisse 0.

B.1. a. $\phi(x) = 2xe^x - 2e^x + 1$ avec $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
et $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ par propriété, donc $\lim_{x\to-\infty} \phi(x) = 1$.

En $+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} xe^x = +\infty$
donc $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = +\infty$ par théorèmes d'opérations.

> **Conseil**
> Quand x tend vers $-\infty$, la recherche de la limite de xe^x par théorème d'opération conduit à une forme indéterminée. C'est une propriété du cours qui nous donne la limite : 0.

b. $xe^x = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$.
Donc $(uv)'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)v'(x)$
$= 1 \times e^x + x \times e^x = e^x + xe^x$.

Par suite, $\phi'(x) = 2(e^x + xe^x) - 2e^x$ donc $\phi'(x) = 2xe^x$.
Comme $e^x > 0$ pour tout réel x,
$\phi'(x)$ est du signe de x.
Donc $\phi'(x) < 0$ sur $]-\infty\,;0[$, $\phi'(x) > 0$ sur $]0\,;+\infty[$
et $\phi'(0) = 0$.

c. On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\phi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\phi(x)$	1	↘	-1	↗	$+\infty$

2. a. La fonction ϕ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires sur $]-\infty\,;0]$
puis sur $[0\,;+\infty[$, on déduit que l'équation $\phi(x) = 0$
a une unique solution dans $]-\infty\,;0]$ et une unique
solution dans $[0\,;+\infty[$, différentes de 0.

x	$-\infty$	α		0		β	$+\infty$
$\phi'(x)$			$-$	0	$+$		
$\phi(x)$	1	0	↘	-1	↗	0	$+\infty$

> **Conseil**
> Placer d'abord les zéros possibles dans la dernière ligne du tableau, puis leurs antécédents α et β en première ligne.

À la calculatrice on trouve que $\alpha \approx$ -1,68 et $\beta \approx$ 0,77.
En effet ϕ(-1,68) > 0 et ϕ(-1,67) < 0 d'après la table de valeurs de ϕ ci-dessous.
Donc -1,68 < α < -1,67.

X	Y1
-1.7	0.0135
-1.69	0.0073
-1.68	0.001
-1.67	-0.005
-1.66	-0.012
-1.65	-0.018

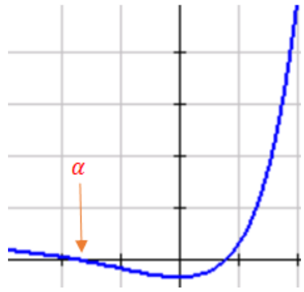
De même ϕ(0,76) < 0 et ϕ(0,77) > 0 donc 0,76 < β < 0,77.

X	Y1
0.7	-0.208
0.71	-0.18
0.72	-0.15
0.73	-0.121
0.74	-0.09
0.75	-0.059
0.76	-0.026
0.77	0.0065
0.78	0.0402
0.79	0.0746
0.8	0.1098

Aide

On peut procéder en plusieurs étapes pour localiser α:

- à l'aide de la courbe représentant ϕ localiser α entre-2 et-1 :



- Faire afficher un tableau de valeurs de ϕ à partir de -2 avec un pas de 0,1 pour localiser α entre -1,7 et -1,6 car ϕ(-1,7)> 0 et ϕ(-1,6) < 0.
- Faire afficher un tableau de valeurs de ϕ à partir de -1,7 avec un pas de 0,01.

C. La droite (EF) passe par le point E de $\mathcal{C}_f$ et le point F de $\mathcal{C}_g$.
Son coefficient directeur est :

$$\frac{y_{\mathrm{F}} - y_{\mathrm{E}}}{x_{\mathrm{F}} - x_{\mathrm{E}}} = \frac{g(-\alpha) - f(\alpha)}{-\alpha - \alpha} = \frac{2\mathrm{e}^{\alpha} - 1}{\alpha}.$$

Or $\phi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2(\alpha - 1)\mathrm{e}^{\alpha} + 1 = 0$
$\Leftrightarrow 2\alpha\mathrm{e}^{\alpha} - 2\mathrm{e}^{\alpha} + 1 = 0$

ce qui s'écrit encore $2\alpha\mathrm{e}^{\alpha} = 2\mathrm{e}^{\alpha} - 1$ puis $\dfrac{2\mathrm{e}^{\alpha} - 1}{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha}$.

Donc (EF) a pour coefficient directeur e^{α} qui est égal à $f'(\alpha)$ et à $g'(-\alpha)$.
Donc (EF) est la tangente à $\mathcal{C}_f$ en E et la tangente à $\mathcal{C}_g$ en F.

Aide

La droite (EF) passe par le point E de $\mathcal{C}_f$.
Pour qu'elle soit la tangente à $\mathcal{C}_f$ en E il faut et il suffit que son coefficient directeur soit égale à $f'(\alpha)$.
Elle passe par le point F de $\mathcal{C}_g$ donc pour qu'elle soit la tangente à $\mathcal{C}_g$ en F il faut et il suffit que son coefficient directeur soit égale à $g'(-\alpha)$.