Chapitre 5 – Objectif Bac – Résolution détaillée

1. a. Pour obtenir cet encadrement de $f(x)$, on pense à utiliser l'encadrement classique du cosinus d'un réel entre -1 et 1.

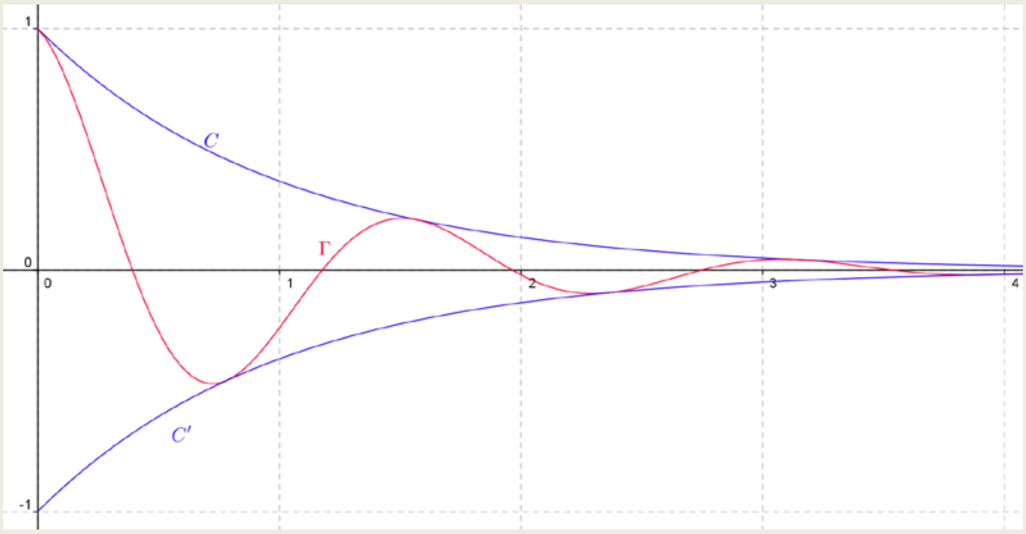
On a donc, pour tout réel x, $-1 \leq \cos 4x \leq 1$.

Pour obtenir $f(x)$, on a besoin de multiplier chaque membre de cet encadrement par e^{-x}.

Ceci est possible car pour tout x réel, e^{-x} est strictement positif.

On obtient donc : $-1 \times \mathrm{e}^{-x} \leq \mathrm{e}^{-x} \cos 4x \leq 1 \times \mathrm{e}^{-x}$
soit $-\mathrm{e}^{-x} \leq f(x) \leq \mathrm{e}^{-x}$ pour tout réel x.

Graphiquement, on en déduit que la courbe représentant la fonction f est comprise entre les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ d'équations $y = \mathrm{e}^{-x}$ et $y = -\mathrm{e}^{-x}$.
En repère orthonormé, ces deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des abscisses.



b. Les points communs aux courbes $\mathcal{C}$ et Γ sont les points dont les coordonnées vérifient els deux équations $y = f(x)$ et $y = g(x)$.

On résout donc l'équation $f(x) = g(x)$:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x}\cos(4x) = \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \cos(4x) = 1$ car on peut simplifier par e^{-x} qui n'est jamais nul.

Or $\cos(4x) = 1 \Leftrightarrow 4x = k \times 2\pi$ avec k entier relatif ($k \in \mathbb{Z}$).

Cependant ici on a $x \geq 0$ donc les solutions sont données par $4x = k \times 2\pi$ avec k entier naturel ($k \in \mathbb{N}$).

Donc $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{N}$.

Les points communs aux courbes $\mathcal{C}$ et Γ sont les points de coordonnées $\left(k\frac{\pi}{2} ; \mathrm{e}^{-k\frac{\pi}{2}}\right)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Conseil

On peut vérifier en traçant les deux courbes sur une calculatrice et en cherchant avec l'outil Trace des valeurs approchées des abscisses des points communs aux deux courbes.
Ces résultats doivent être cohérents avec les valeurs trouvées ci-dessus pour
$k = 0$, soit $k\frac{\pi}{2} = 0$, pour $k = 1$, $\frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}6$ puis pour $k = 2$, $\frac{k\pi}{2} = \pi \approx 3{,}1$.

2. a. On exprime u_n:

$u_n = f\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}}\cos\left(4n\frac{\pi}{2}\right)$.

Or $\cos\left(4n\frac{\pi}{2}\right) = \cos(n\,2\pi) = 1$ car n est un entier.

Donc $u_n = \mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}}$ pour tout n entier naturel.

On remarque que u_n est l'ordonnée du point commun à $\mathcal{C}$ et Γ d'abscisse $n\frac{\pi}{2}$ trouvé à la question 1. b.

On en déduit que pour tout n de $\mathbb{N}$,
$u_n = \left(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}\right)^n$ qui est de la forme q^n avec $q = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$.

On en déduit que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$.

Conseil

Si on ne voit pas directement que $\mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}} = \left(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}\right)^n$ on peut aussi calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en essayant de simplifier ce quotient pour trouver une constante, qui sera la raison de la suite.

Or $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)\frac{\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}}} = \mathrm{e}^{-(n+1)\frac{\pi}{2}}.\mathrm{e}^{n\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{-(n+1)\frac{\pi}{2}+n\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$.

Cette méthode nécessite de s'assurer que u_n est non nul, pour tout n, pour pouvoir calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

b. On a pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = q^n$ avec $0 < q < 1$.

En effet $-\frac{\pi}{2} < 0$ donc par stricte croissance de l'exponentielle, $\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} < 1$.

De plus $\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} > 0$ cat toute exponentielle est strictement positive.

La suite (u_n) est donc décroissante et converge vers 0.

3. a. On a $f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $v(x) = \cos(4x)$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec
$u'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ et $v'(x) = 4\cos'(4x) = -4\sin(4x)$

On en déduit que f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$, intervalle sur lequel elle est définie, avec

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cos(4x) + \mathrm{e}^{-x}(-4\sin(4x))$$

En factorisant on obtient :

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}(\cos(4x) + 4\sin(4x)).$$

b. Les points communs à $\mathcal{C}$ et Γ ont pour abscisse $n\frac{\pi}{2}$ pour n entier naturel.

La tangente à Γ au point d'abscisse $n\frac{\pi}{2}$ a pour coefficient directeur $f'\left(n\frac{\pi}{2}\right)$:

$$f'\left(n\frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}}(\cos(n2\pi) + 4\sin(n2\pi)) = -\mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}}$$

car $\cos(n2\pi) = 1$ et $\sin(n2\pi) = 0$ pour tout entier naturel n.

La fonction g est elle aussi dérivable et $g'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$. Donc la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $n\frac{\pi}{2}$ a pour coefficient directeur

$g'\left(n\frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}}$.

Les tangentes à $\mathcal{C}$ et Γ en leur point commun d'abscisse $n\frac{\pi}{2}$ ont donc même coefficient directeur ; elles sont donc confondues.

On en déduit que les courbes $\mathcal{C}$ et Γ ont même tangente en chacun de leurs points communs.

4. a. Le coefficient directeur demandé est $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Du calcul de $f'\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ effectué en question précédente, on obtient en prenant $n = 1$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} \approx$ - 0,2 à 10^{-1} près.

On obtient le graphique suivant où l'on a placé le point M commun à $\mathcal{C}$ et Γ dabscisse $\frac{\pi}{2}$ puis tracé la tangente T comme étant la droite passant par M et de coefficient directeur environ – 0,2 (donc de vecteur directeur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}$: construction en grisé ci-dessous).