Chapitre 11 – Corrigé détaillé – Objectif Bac

1. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}(1;-1;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(2;-5;-3)$ ne sont pas proportionnelles (car $2 = 2 \times 1$ et $-5 \neq 2 \times (-1)$),

donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires,

donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. a. $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + (-1) \times (-1) + 3 \times (-1)$

$= 2 + 1 - 3 = 0$

Et $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 2 + (-1) \times (-5) + 3 \times (-3)$

$= 4 + 5 - 9 = 0.$

Le vecteur $\vec{u}$ qui dirige la droite Δ est donc orthogonal aux Vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui dirigent le plan (ABC) donc la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

Rappel
Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un vecteur directeur de la droite est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (conséquence de la définition 3 page 338).

b. Le vecteur $\vec{u}$ est non nul et orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui dirigent le plan (ABC) donc $\vec{u}(2;-1;3)$ un vecteur normal au plan (ABC).

Rappel
Un vecteur est normal à un plan si il est non nul et orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (définition 6 page 342).

Méthode 1

$M(x;y;z) \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-0) + (-1)(y-4) + 3(z-1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - y + 3z + 4 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2x - y + 3z + 1 = 0.$

On en déduit que le plan (ABC) a pour équation :

$2x - y + 3z + 1 = 0.$

Méthode 2

(ABC) a donc une équation de la forme :

$2x - y + 3z + d = 0$.

Le point A appartient à (ABC) d'où

$2 \times 0 - 4 + 3 \times 1 + d = 0$ donc $-1 + d = 0$

donc $d = 1$.

On en déduit que (ABC) a pour équation :

$2x - y + 3z + 1 = 0$.

c. D'après l'énoncé, la droite Δ passe par le point D(7 ; -1 ; 4)

et a pour vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 3)$.

On en déduit Δ : $\begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \, , t \in \mathbb{R} \\ z = 4 + 3t \end{cases}$

d. $\mathrm{H}(x; y; z) \in \Delta \cap (\mathrm{ABC})$

⇔ il existe un réel *t* tel que $\begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \\ 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$

ce qui revient à résoudre

$2(7 + 2t) - (-1 - t) + 3(4 + 3t) + 1 = 0$

soit $14t + 28 = 0$ soit $t = -2$.

En remplaçant *t* par -2 dans les équations de la représentation paramétrique de Δ, on obtient : $x = 7 + 2(-2) = 3$,

$y = -1 — 2 = 1$ et $z = 4 + 3(-2) = -2$: on en déduit que le point d'intersection de Δ et (ABC) est le point $\mathrm{H}(3; 1; -2)$.

3. a. $\mathcal{P}_1$ a pour équation $x + y + z = 0$ donc $\overrightarrow{n_1}(1; 1; 1)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{P}_1$.

$\mathcal{P}_2$ a pour équation $x + 4y + 2 = 0$ donc $\overrightarrow{n_1}(1; 4; 0)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{P}_2$.

Rappels

- Deux plans sont parallèles si et seulement si un vecteur normal de l'un est colinéaire à un vecteur normal de l'autre.

L'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;y\,;z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires donc les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles et donc sont sécants.

b. *Méthode 1*

Vérifions que tout point de *d* appartient à $\mathcal{P}_1$ et à $\mathcal{P}_2$.

M$(x\,;y\,;z) \in d$

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}$$

Or pour tout réel *t*,

$(-4t - 2) + (t) + (3t + 2) = 0t + 0 = 0$ donc tout point de *d* appartient à $\mathcal{P}_1$ et pour tout réel *t*,

$(-4t - 2) + 4(t) + 2 = 0t + 0 = 0$ donc tout point de *d* appartient à $\mathcal{P}_2$.

Comme on sait que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants, on en déduit que leur droite d'intersection est *d*.

Méthode 2

$$\text{M}(x\,;y\,;z) \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-4y - 2) + y + z = 0 \\ x = -4y - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3y + z - 2 = 0 \\ x = -4y - 2 \end{cases}$$

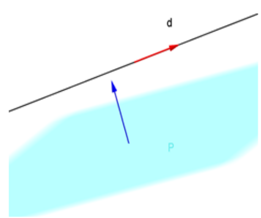
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 3y + 2 \\ x = -4y - 2 \end{cases}$$

en choisissant comme paramètre $y = t$, on obtient la représentation paramétrique de *d* proposée :

$$\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Rappel

Une droite est parallèle à un plan si et seulement si un vecteur normal au plan est orthogonal à un vecteur directeur de la droite.



c. $\vec{v}$(-4 ; 1 ; 3) est un vecteur directeur de *d* et

$\vec{u}(2; -1; 3)$ un vecteur normal au plan (ABC).

$\vec{v} \cdot \vec{u} = (-4) \times 2 + 1 \times (-1) + 3 \times 3 = 0$

donc un vecteur directeur de *d* est orthogonal

à un vecteur normal au plan (ABC),

d'où la droite *d* est parallèle au plan (ABC).

Testons si le point E(-2 ;0 ;2) de *d* appartient à (ABC) :

$2(-2) - 0 + 3 \times 2 + 1 = -4 + 6 + 1 = 1 \neq 0$

donc E n'appartient pas à (ABC) donc la droite *d*

est strictement parallèle au plan (ABC).