Chapitre 5 – Exercice 70 page 155

A. Nombre de solutions d'une équation

Soit f définie sur $[-1\,;1]$ par $f(x) = -4x^3 + 3x$.

1. Tracer la courbe représentant f sur une calculatrice. Conjecturer le sens de variation de f et le nombre de solutions dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ de l'équation $f(x) = a$ pour $0 < a < 1$.

2. Démontrer ces conjectures.

B. L'algorithme d'Al-Kashi pour calculer sin (1°)

1. Le logiciel de calcul formel Xcasfr transforme l'expression sin(3t) de la façon suivante :

```
trigexpand(sin(3*t))
(4*cos(t)^2-1)*sin(t)
```

En déduire que pour tout réel t,

$$\sin(3t) = 3\sin(t) - 4\sin^3 t.$$

2. Le mathématicien Al-Kashi connaissait une valeur approchée très précise de sin(3°) et cherchait une valeur approchée de $x = \sin(1°)$.

a. Justifier que x est la solution de l'équation $f(x) = \sin(3°)$ dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

b. Montrer que $x = g(x)$ où $g(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{\sin(3°)}{3}$.

3. L'algorithme d'Al-Kashi consiste, en termes modernes, à prendre pour 1$^{\text{re}}$ valeur approchée de x, $x_1 = \frac{1}{60}$ puis comme 2$^{\text{e}}$ valeur approchée de x, $x_2 = g(x_1)$, comme 3$^{\text{e}}$ valeur approchée de x, $x_3 = g(x_2)$, etc.

a. Écrire un algorithme qui fournisse la valeur approchée obtenue par Al-Kashi au bout de 9 itérations.

b. En utilisant pour approximation de sin(3°) la valeur suivante connue à l'époque :

$$\frac{3}{60} + \frac{8}{60^2} + \frac{24}{60^3} + \frac{33}{60^4} + \frac{59}{60^5} + \frac{34}{60^6} + \frac{28}{60^7} + \frac{15}{60^8},$$

programmer cet algorithme.

c. Comparer le résultat obtenu avec la valeur de sin(1°) fournie par la calculatrice.