1.a. Calculons $AX + C$:

$$AX + C = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}5 \times 16 + 0{,}25 \times 20 + 0{,}25 \times 12 \\ 0{,}25 \times 16 + 0{,}5 \times 20 + 0{,}25 \times 12 \\ 0{,}25 \times 16 + 0{,}25 \times 20 + 0{,}5 \times 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

d'où $AX + C = \begin{bmatrix} 16 \\ 17 \\ 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix}$ c'est-à-dire $AX + C = X$.

1.b. ● Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, $Y_{n+1} = AY_n$.

$Y_{n+1} = X_{n+1} - X$ par définition de (Y_n).

Or $X_{n+1} = AX_n + C$ (1) par définition de (X_n) et $X = AX + C$ (2) par la question 1.a.

Par différence membre à membre de (1) et (2) , on déduit que $X_{n+1} - X = AX_n - AX$, ce qui s'écrit encore $X_{n+1} - X = A(X_n - X)$ soit $Y_{n+1} = AY_n$.

● Par une récurrence immédiate, pour tout n de $\mathbb{N}$, $Y_n = A^nY_0$ (*)

Autrement dit, pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_n - X = A^n(X_0 - X)$
ce qui donne $X_n = A^n(X_0 - X) + X$.

(*) *On peut mettre en forme cette récurrence :*

① Initialisation : Montrons que l'égalité est vraie pour $n = 0$.

Pour $n = 0$, on a $Y_n = Y_0$ et d'autre part, $A^nY_0 = A^0Y_0 = I_3Y_0 = Y_0$

L'égalité est donc vérifiée pour $n = 0$.

② Hérédité : Soit n un entier supérieur ou égal à 0.
Supposons que pour cet entier on ait $Y_n = A^n Y_0$.

Alors $Y_{n+1} = A\,Y_n = A\,A^n Y_0$ par hypothèse de récurrence. Donc $Y_{n+1} = A^{n+1} Y_0$ ce qui démontre l'hérédité.

③ Conclusion : pour tout $n \geq 0$, $Y_n = A^n Y_0$.

2.a. $B = 4A - 2I = 4\begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

b. ● Calculons B^2 et $2I + B$:

$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$2I + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

On constate que $B^2 = 2I + B$.

●Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$, il existe des réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_n I + \beta_n B$.
① Initialisation : Montrons que ceci est vrai pour $n = 0$.

Pour $n = 0$, on a $A^0 = I$ donc $A^0 = \alpha_0 I + \beta_0 B$ avec $\alpha_0 = 1$ et $\beta_0 = 0$.

② Hérédité : Soit n un entier supérieur ou égal à 0.
Supposons que pour cet entier on ait $A^n = \alpha_n I + \beta_n B$.

Alors $A^{n+1} = A^n A = (\alpha_n I + \beta_n B)A$ par hypothèse de récurrence

Or $B = 4A - 2I$, donc $A = \frac{1}{4}B + \frac{1}{2}I$.

Par conséquent, $A^{n+1} = (\alpha_n I + \beta_n B)\left(\frac{1}{4}B + \frac{1}{2}I\right)$. En développant,

$A^{n+1} = \frac{1}{4}\alpha_n B + \frac{1}{2}\alpha_n I + \frac{1}{4}\beta_n B^2 + \frac{1}{2}\beta_n B$

En remplaçant B^2 par 2I + B, on obtient

$A^{n+1} = \frac{1}{4}\alpha_n B + \frac{1}{2}\alpha_n I + \frac{1}{2}\beta_n I + \frac{1}{4}\beta_n B + \frac{1}{2}\beta_n B$

$A^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{2}\beta_n\right) I + \left(\frac{1}{4}\alpha_n + \frac{3}{4}\beta_n\right) B$

On a donc bien $A^{n+1} = \alpha_{n+1} I + \beta_{n+1} B$ avec $\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{2}\beta_n$ et $\beta_{n+1} = \frac{1}{4}\alpha_n + \frac{3}{4}\beta_n$. L'hérédité est donc établie.

③ Conclusion : Pour tout $n \geq 0$, $A^n = \alpha_n I + \beta_n B$ avec les suites (α_n) et (β_n) telles que $\alpha_0 = 1$ et $\beta_0 = 0$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{2}\beta_n$ et $\beta_{n+1} = \frac{1}{4}\alpha_n + \frac{3}{4}\beta_n$.

3. a. On sait que $U_{n+1} = \begin{bmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{bmatrix}$

On a donc $U_{n+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{2}\beta_n \\ \frac{1}{4}\alpha_n + \frac{3}{4}\beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix}$

Ceci s'écrit encore $U_{n+1} = M\, U_n$. On en déduit par une récurrence immédiate que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n = M^n U_0$.

b. Calculons MV et MW

$MV = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 + 0{,}5 \\ 0{,}25 + 0{,}75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = V.$

$MW = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \times 0{,}5 + 0{,}5 \\ -2 \times 0{,}25 + 0{,}75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}25 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}W.$

1 et $\frac{1}{4}$ sont des valeurs propres de M.

c. M admet pour autre valeur propre μ = 1 et = $\frac{1}{4}$.

Alors $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}25 \end{bmatrix}$ et $P = [\,V \;\; W] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

On a alors pour tout $n \geq 1$, $M^n = PDP^{-1}\, PDP^{-1} \ldots PDP^{-1}$ où $P^{-1}P = I$.

Donc $M^n = PDIDI \ldots DIP^{-1} = PDD \ldots DP^{-1} = PD^nP^{-1}$.

d. P a pour déterminant 1×1 – 1×(-2) = 3, donc $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (propriété 3 page 130).Comme D est diagonale, on sait calculer D^n :

$$D^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0{,}25^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}25^n \end{bmatrix}.$$

On a alors $M^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}25^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, soit

$$M^n = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \times 0{,}25^n \\ 1 & 0{,}25^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 + 2 \times 0{,}25^n & 2 - 2 \times 0{,}25^n \\ 1 - 0{,}25^n & 2 + 0{,}25^n \end{bmatrix}.$$

e. Comme 0 < 0,25 < 1, la limite de $0{,}25^n$ est 0 quand n tend vers +∞, donc M^n tend vers la matrice $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Comme $U_n = M^nU_0$, on en déduit que U_n tend vers $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} U_0 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

Par conséquent U_n tend vers $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, ce qui signifie que les suites (α_n) et (β_n) ont toutes deux pour limite $\frac{1}{3}$ quand n tend vers +∞.

4. Les suites (α_n) et (β_n) ont pour limite $\frac{1}{3}$, donc A^n tend vers $\frac{1}{3}(I + B)$.

De $X_n = A^n(X_0 - X) + X$, on déduit que X_n tend vers $\frac{1}{3}(I + B)(X_0 - X) + X$.

Calculons $\frac{1}{3}(\mathrm{I}+\mathrm{B})(\mathrm{X}_0-\mathrm{X})+\mathrm{X}$:

$$\frac{1}{3}(\mathrm{I}+\mathrm{B})=\frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{X}_0-\mathrm{X}=\begin{bmatrix}12\\16\\10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}16\\20\\12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\-4\\-2\end{bmatrix}\text{, donc}$$

$$\frac{1}{3}(\mathrm{I}+\mathrm{B})(\mathrm{X}_0-\mathrm{X})=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\-4\\-2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-10\\-10\\-10\end{bmatrix}\text{ et}$$

$$\frac{1}{3}(\mathrm{I}+\mathrm{B})(\mathrm{X}_0-\mathrm{X})+\mathrm{X}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-10\\-10\\-10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}16\\20\\12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{38}{3}\\\frac{50}{3}\\\frac{26}{3}\end{bmatrix}.$$

Dire que X_n tend vers $\begin{bmatrix}\frac{38}{3}\\\frac{50}{3}\\\frac{26}{3}\end{bmatrix}$ signifie que les suites (p_n), (q_n) et (r_n) tendent respectivement vers $\frac{38}{3}, \frac{50}{3}, \frac{26}{3}$.