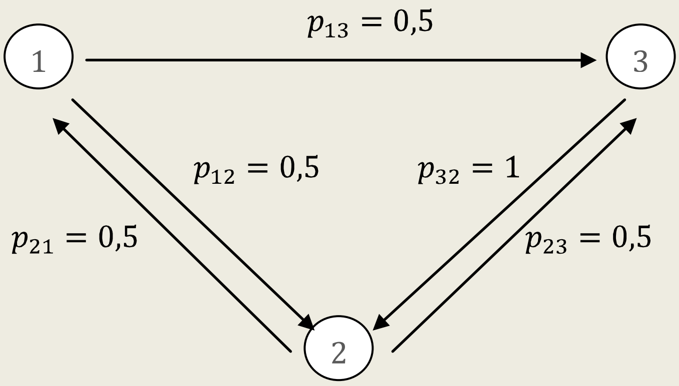
1. On peut compléter le graphe fourni dans l'énoncé en indiquant les probabilités au-dessus de chaque flèche.
Pour cela on sait qu'étant à une page donnée, le choix de la page suivante se fait aléatoirement entre les pages possibles.
On obtient donc le graphe probabiliste suivant :



$$M = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Par énoncé $P_n = (P(X_n = 1)\ \ P(X_n = 2)\ \ P(X_n = 3))$
Or, pour $n \geq 1$, et pour $i = 1, 2$ ou 3

$$P(X_n = i) = P_{(X_{n-1}=1)}(X_n = i) \times P(X_{n-1} = 1)$$
$$+ P_{(X_{n-1}=2)}(X_n = i) \times P(X_{n-1} = 2)$$
$$+ P_{(X_{n-1}=3)}(X_n = i) \times P(X_{n-1} = 3)$$

Donc

$$P(X_n = i) = p_{1i}\, P(X_{n-1} = 1) + p_{2i} P(X_{n-1} = 2) + p_{3i}\, P(X_{n-1} = 3)$$

ce qui se traduit sous forme matricielle par

$(P(X_n = 1)\ \ P(X_n = 2)\ \ \ P(X_n = 3)) =$

$$(P(X_{n-1} = 1)\ \ P(X_{n-1} = 2)\ \ \ P(X_{n-1} = 3)) \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire $P_n = P_{n-1} M$. Par une récurrence immédiate, on en déduit que pour tout $n \geq 0$, $P_n = P_0 M^n$.

3.a. $Q = P^{-1}MP = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 8 & -2 & -6 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

On peut calculer Q à la main ou à la calculatrice.

● À la main :

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 8 & -2 & -6 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1,5 & 1,5 & 0 \end{bmatrix}$$

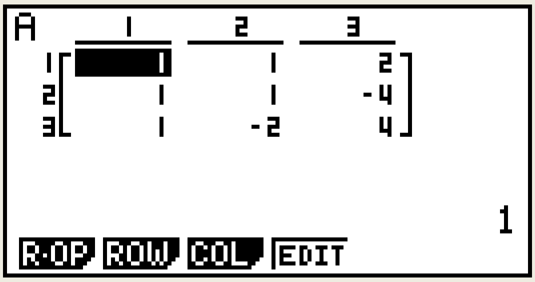
donc

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 8 & -2 & -6 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 & 8 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1,5 & 1,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

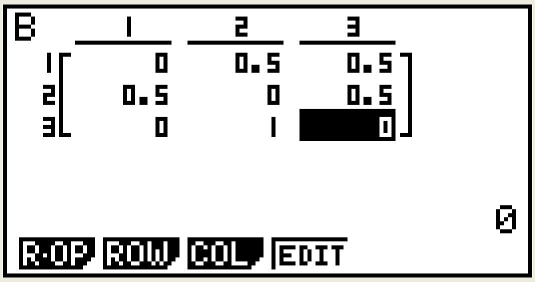
d’où $Q = P^{-1}MP = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{bmatrix}$.

● À la calculatrice :

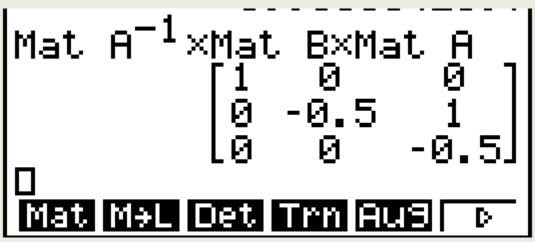
On entre P en matrice A :



On entre M en matrice B :



On calcule $A^{-1}BA$:



On a donc $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \end{bmatrix}$.

On vérifie que $Q = D + T$.

3.b. On calcule DT :

$$DT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On calcule de même TD et on observe que

$$DT = TD = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}T.$$

On calcule $T^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ donc $T^2 = O_3$, matrice nulle.

c. Démontrons ce résultat par récurrence :

① Initialisation : Montrons que l'égalité est vraie pour $n = 1$.

Pour $n = 1$, on a $Q^n = Q$ et $D^n + n(-0{,}5)^{n-1}\,T = D + T$.

Comme $Q = D + T$, on a bien l'égalité $Q^n = D^n + n(-0{,}5)^{n-1}\,T$ pour $n = 1$.

② Hérédité : Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
Supposons que pour cet entier on ait $Q^n = D^n + n(-0{,}5)^{n-1}\,T$.

Montrons que $Q^{n+1} = D^{n+1} + (n+1)(-0{,}5)^n T$,

$Q^{n+1} = Q^n Q$ donc par hypothèse de récurrence,

$Q^{n+1} = (D^n + n(-0{,}5)^{n-1}\,T)(D + T)$

$Q^{n+1} = D^{n+1} + D^n T + n(-0{,}5)^{n-1} TD + n(-0{,}5)^{n-1} T^2$.

Or on a montré que $TD = -0{,}5\,T$ et $T^2 = O_3$, donc

$Q^{n+1} = D^{n+1} + (n+1)(-0{,}5)^n T$, ce qui démontre l'hérédité.

③ Conclusion : pour tout $n \geq 1$, $Q^n = D^n + n(-0{,}5)^{n-1}\,T$.

d. $PQP^{-1} = P(P^{-1}MP)P^{-1} = M$ car $PP^{-1} = P^{-1}P = I_3$

Alors pour tout $n \geq 1$, $M^n = MM\ldots M = PQP^{-1}PQP^{-1}\ldots\ldots PQP^{-1}$, où $PP^{-1} = I$, matrice unité d'ordre 3.

Donc $M^n = PDIDI\ldots DIP^{-1} = PDD\ldots DP^{-1} = PD^nP^{-1}$.

e. On a $Q^n = D^n + n(-0,5)^{n-1}\,T$. Or D est une matrice diagonale donc

$D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-0,5)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-0,5)^n \end{bmatrix}$ et $n(-0,5)^{n-1}\,T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n(-0,5)^n \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Par conséquent, $Q^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-0,5)^n & n(-0,5)^n \\ 0 & 0 & (-0,5)^n \end{bmatrix}$.

Quand n tend vers $+\infty$, $(-0,5)^n$ tend vers 0 car $-1 < -0,5 < 1$.

De plus $|n(-0,5)^n| = n\,0,5^n = n\,\mathrm{e}^{nln(0,5)} = n\mathrm{e}^{-nln2} = \frac{1}{ln2}\,N\mathrm{e}^{-N}$ avec $N = n\ln 2$ qui tend vers $+\infty$.

Par le théorème de croissance comparée, $N\mathrm{e}^{-N}$ a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc $n(-0,5)^n$ a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.

Par conséquent, quand n tend vers $+\infty$, Q^n a pour limite la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

De $M^n = PQ^nP^{-1}$, on déduit que, quand n tend vers $+\infty$, M^n a pour limite

$$P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 8 & -2 & -6 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 8 & -2 & -6 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 4 & 8 & 6 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Donc, quand n tend vers $+\infty$, M^n vers $M_\infty = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

4. Soit $P_0 = (a \ \ b \ \ c)$ l'état initial avec a, b, c réels positifs de somme 1.

Alors $P_n = P_0 M^n$ donc P_n tend vers $(a \ \ b \ \ c)M_\infty$

Or $(a \ \ b \ \ c)M_\infty = \frac{1}{9}(a \ \ b \ \ c)\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{9}\ (2a + 2b + 2c \qquad 4a + 4b + 4c \qquad 3a + 3b + 3c).$$

Comme $a + b + c = 1$,

$$(a \ \ b \ \ c)M_\infty = \frac{1}{9}\ (2 \quad 4 \quad 3).$$

P_n tend donc, quand n tend vers $+\infty$, vers $\frac{1}{9}\ (2 \quad 4 \quad 3)$, ce qui signifie que

$P(X_n = 1)$ tend vers $\frac{2}{9}$, $P(X_n = 2)$ tend vers $\frac{4}{9}$, $P(X_n = 3)$ tend vers $\frac{3}{9}$,

C'est donc la page 2 qui est la plus probable après de très nombreux clics.