Temps de retour à l'état initial dans le cas N = 3

L'étude détaillée du retour à l'état initial est complexe dès que N grandit. Cette étude a été effectuée dans le cas $\mathrm{N} = 2$ au chapitre 4 (pages 134 et 135, partie D). Nous allons ici l'aborder dans le cas $\mathrm{N} = 3$.

Les notations sont celles des parties B et C du problème 1 pages 170, 171, 172.

On note pour $n > 0$, Y_n la variable aléatoire qui compte les boules présentes dans B après n transferts (on pose $\mathrm{Y}_0 = 0$).

1. Écrire une relation, valable pour tout entier n, entre X_n et Y_n.

2. On note T_0 la variable aléatoire égale, au plus petit $n > 0$ pour lequel $\mathrm{Y}_n = 0$ et on pose $\mathrm{T}_0 = 0$ si cet événement ne se réalise pas.
De la même façon, on note T_1 égale, dans le cas où $\mathrm{Y}_0 = 1$, au plus petit $n > 0$ pour lequel $\mathrm{Y}_0 = 1$ et on pose $\mathrm{T}_1 = 0$ si on ne revient pas à cet état initial.
On définit de même T_2 et T_3.

a. T_0 admet-elle un nombre fini de valeurs ? Pour n impair, quelle est la valeur de $\mathrm{P}(\mathrm{T}_0 = n)$?

On admet que : $\mathrm{P}(\mathrm{T}_0 = 0) + \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{k=n} \mathrm{P}(\mathrm{T}_0 = 2k) \right) = \mathrm{P}(\Omega) = 1$.

b. Représenter la situation à l'aide d'un arbre construit jusqu'à $n = 4$ et établir les valeurs de $\mathrm{P}(\mathrm{T}_0 = 2)$, $\mathrm{P}(\mathrm{T}_0 = 4)$, $\mathrm{P}(\mathrm{T}_1 = 1)$ et $\mathrm{P}(\mathrm{T}_2 = 2)$.

c. Montrer que pour $k \geq 2$, $\mathrm{P}(\mathrm{T}_0 = 2k) = \mathrm{P}(\mathrm{T}_1 = 2k - 1)$ et que $\mathrm{P}(\mathrm{T}_3 = 2k - 1) = \mathrm{P}(\mathrm{T}_2 = 2k - 2)$.

d. Établir que : $P(T_2 = 2k) = \dfrac{2}{3}P(T_1 = 2k - 1) + \dfrac{1}{3}P(T_2 = 2k - 2)$.

e. En déduire la loi de T_2 puis celle de T_1.

f. Montrer que pour tout $k \geq 2$, $P(T_0 = 2k) = \dfrac{4}{27}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{k-2}$.

g. Établir que $P(T_0 = 0) = 0$. Interpréter ce résultat.

4. a. Dans le cas où T est une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$, on définit E(T) par :

$$E(T) = \lim_{n \to +\infty}\left(\sum_{i=0}^{i=n} P(T = i) \times i\right).$$

Écrire $E(T_0)$.

b. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x + \ldots + x^m$ où m est un entier naturel non nul donné.

Exprimer $f(x)$ autrement pour $x \neq 1$.
En déduire, en dérivant f à l'aide des deux expressions obtenues, une expression de $\sum_{i=0}^{m-1} ix^i$ pour $x \neq 1$.
En déduire $E(T_0)$ et interpréter ce résultat.