Chapitre 10 – Exercice résolu 8 – Corrigé détaillé

1. Le principe

Le principe de l'algorithme de Dijkstra est de calculer au fur et à mesure le plus court chemin reliant **le point A**, origine du trajet, **à chaque sommet** du graphe, par ordre croissant d'éloignement, jusqu'à ce que l'on parvienne au point D, **destination finale** du parcours.

On présentera les étapes successives dans un tableau, chaque nouvelle étape correspondant à une nouvelle ligne du tableau (à chaque étape, les nouvelles lignes sont en rose).

Conseil
Cet algorithme expose une méthode qui conduit systématiquement au résultat cherché, il est donc à connaitre !

2. Préparation du tableau

On place tous les sommets du graphe dans un tableau.
On affecte au sommet source A la valeur 0 et à tous les autres sommets la valeur « ∞ ».
La dernière colonne, celle intitulée « sommet atteint », indique le point qui vient d'être atteint (le sommet source au début).

A	B	C	D	E	F	G	H	Sommet atteint
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A

3. Étape 1

- On ajoute une ligne au tableau pour cette étape.
- On se place au dernier sommet atteint, A ici, et on cherche les sommets qui lui sont adjacents : ce sont B, E et F.
- Dans les cases de la nouvelle ligne qui correspondent à ces sommets, on indique **le poids** (ici le kilométrage) ainsi que le nom du dernier sommet atteint, ici A.
On garde la valeur « ∞ » dans les autres colonnes.
- Dans la colonne « sommet atteint », on indique le sommet ayant le plus faible poids, ici E.
- Une fois qu'un sommet a été traité, A ici, on noircit la colonne qui correspond à ce sommet.

Conseil
À chaque ligne, distinguer le chemin le plus court (en rouge ici). Cela permet de vérifier ses calculs, de mieux se repérer et de conclure facilement.

A	B	C	D	E	F	G	H	Sommet atteint
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	(19,A)	∞	∞	(6,A)	(10,A)	∞	∞	E

4. Étape 2

• On ajoute une ligne au tableau pour cette étape.

• On se place au dernier sommet atteint, E ici, et on cherche les sommets non traités qui lui sont adjacents:
ce sont B, H et F.
(le point A ayant déjà été étudié, on ne le prend plus en compte).

• Dans les cases de la nouvelle ligne qui correspondent à ces sommets, on indique **le poids** (ici le kilométrage) ainsi que le nom du dernier sommet atteint, ici E.
On garde la valeur « ∞ » dans les autres colonnes.

Détail des calculs :

- Pour B, le chemin allant de A à B et passant par E a pour poids 6 + 7 = 13. Il est d'un poids inférieur au précédent chemin (19). On indique donc dans la colonne de B la valeur 13 associée au point E.
- Pour H, il n'y a pour l'instant aucun autre chemin conduisant à H autre que celui passant par E. Il a pour poids 14+6 =20, on indique dans la colonne de H la valeur 20 associée au point E.
- Pour F, le chemin allant de A à F et passant par E a pour poids 11. Il est d'un poids supérieur au précédent chemin (10). On garde donc le chemin précédent.

Remarque
Il peut y avoir des cas d'égalité. Dans ce cas, on choisit une possibilité, celle que l'on veut. On recherche un trajet minimal et non pas tous les trajets minimaux...

• Dans la colonne « sommet atteint », on indique le sommet ayant le plus faible poids, ici F.

• E ayant été traité, on noircit la colonne qui correspond à ce sommet.

A	B	C	D	E	F	G	H	Sommet atteint
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	(19,A)	∞	∞	(6,A)	(10,A)	∞	∞	E
	(13,E)	∞	∞		(10,A)	∞	(20,E)	F

5. Étape 3

Même stratégie en se plaçant maintenant en F.
Le chemin le plus court pour atteindre F a pour longueur 10.
Les sommets H, D et G sont adjacents à F
(on ne prend pas en compte A et E, déjà étudiés).

- B n'étant pas adjacent à F, on lui associe le même couple (13, E).
- Pour H, le chemin allant de A à H et passant par F a pour poids 10+8 = 18. Il est d'un poids inférieur au précédent chemin (20). On indique donc dans la colonne de H la valeur 18 associée au point F.
- Pour D, il n'y a pour l'instant pas d'autre chemin possible qu'un chemin passant par F. Il a pour poids 35 (10+25), on indique donc dans la colonne de D la valeur 35 associée au point F.
- Idem pour le point G, non encore visité. Le chemin allant de A à G passant par F a pour poids 22. On indique donc dans la colonne de G la valeur 22 associée au point F.

Dans la colonne « sommet atteint », on indique le sommet ayant le plus faible poids, maintenant B.

A	B	C	D	E	F	G	H	Sommet atteint
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	(19,A)	∞	∞	(6,A)	(10,A)	∞	∞	E
	(13,E)	∞	∞		(10,A)	∞	(20,E)	F
	(13,E)	∞	(35,F)			(22,F)	(18,F)	B

6. Étape 4 : On se place maintenant en B.

Les sommets adjacents à B sont A, E (dont on ne tient pas compte), H, C et D.

- Pour H le chemin allant de A à H en passant par B a pour poids 13+7=20, il est d'un poids supérieur au précédent donc on conserve le poids précédent 18.
- Pour C qui n'avait pas été atteint jusqu'à présent, on a un poids pour le chemin de A à C en passant par B égal à 13+13=26. On marque donc (26, B) dans la colonne correspondant.
- Pour D, on a un chemin de A à D en passant par B égal à 20+13=33. Il est d'un poids inférieur au précédent (35) donc on remplace (35, F) par (33, B).
- Dans la colonne « Sommet atteint », on indique maintenant H car il a le poids le plus faible.

A	B	C	D	E	F	G	H	Sommet atteint
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	(19,A)	∞	∞	(6,A)	(10,A)	∞	∞	E
	(13,E)	∞	∞		(10,A)	∞	(20,E)	F
	(13,E)	∞	(35,F)			(22,F)	(18,F)	B
		(26,B)	(33,B)			(22,F)	(18,F)	H

7. Étape 5 : On se place en H.

- Le seul sommet adjacent à H et non encore atteint est D.
  Le poids total obtenu est alors égal à 18+13=31 ;
  ce poids étant inférieur à 33, on peut remplacer
  dans la colonne correspondante.
- Les deux autres sommets C et G n'étant pas adjacents à H,
  on recopie les valeurs de la ligne précédente.

Le sommet maintenant atteint car de poids le plus faible est G.

A	B	C	D	E	F	G	H	Sommet atteint
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	(19,A)	∞	∞	(6,A)	(10,A)	∞	∞	E
	(13,E)	∞	∞		(10,A)	∞	(20,E)	F
	(13,E)	∞	(35,F)			(22,F)	(18,F)	B
		(26,B)	(33,B)			(22,F)	(18,F)	H
		(26,B)	(31,H)			(22,F)		G

8. Étape 6 : On se place en G.

- Le seul sommet adjacent à G et non encore atteint est D.
  Le poids total est de 22+15=37.
  Ce poids étant supérieur à 31, on conserve (31, H) dans le tableau.
  Enfin, on recoupe (26, B) dans la colonne C, cette valeur étant
  maintenant la plus faible.

On fixe donc le sommet C comme étant atteint.

A	B	C	D	E	F	G	H	Sommet atteint
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	(19,A)	∞	∞	(6,A)	(10,A)	∞	∞	E
	(13,E)	∞	∞		(10,A)	∞	(20,E)	F
	(13,E)	∞	(35,F)			(22,F)	(18,F)	B
		(26,B)	(33,B)			(22,F)	(18,F)	H
		(26,B)	(31,H)			(22,F)		G
		(26,B)	(31,H)					C

9. Étape 7 : On se place en C.

- Le chemin de A à D passant par C a un poids total de 26+6=32.
  Ce poids étant supérieur à 31, on conserve donc le poids de 31.

A	B	C	D	E	F	G	H	Sommet atteint
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	(19,A)	∞	∞	(6,A)	(10,A)	∞	∞	E
	(13,E)	∞	∞		(10,A)	∞	(20,E)	F
	(13,E)	∞	(35,F)			(22,F)	(18,F)	B
		(26,B)	(33,B)			(22,F)	(18,F)	H
		(26,B)	(31,H)			(22,F)		G
		(26,B)	(31,H)					C
			(31,H)					D

10. Conclusion

Tous les chemins les plus courts ont été calculés.
La longueur minimale du chemin recherché est de 31 km.
D'après l'algorithme, il nécessite de passer par le point H.
Pour rejoindre ce point, il convient de passer par F
qui lui est directement relié à A
(on remonte le tableau jusqu'au sommet A).
Ainsi, un itinéraire correspondant est **A – F – H – D**.

Remarque
Le sommet final peut être atteint avec le plus court chemin alors que certains sommets n'ont pas été traités.

A	B	C	D	E	F	G	H	Sommet atteint
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	(19,A)	∞	∞	(6,A)	(10,A)	∞	∞	E
	(13,E)	∞	∞		(10,A)	∞	(20,E)	F
	(13,E)	∞	(35,F)			(22,F)	(18,F)	B
		(26,B)	(33,B)			(22,F)	(18,F)	H
		(26,B)	(31,H)			(22,F)		G
		(26,B)	(31,H)					C
			(31,H)					D