Chapitre 3 – Corrigé détaillé – Objectif Bac

On considère la fonction f définie sur [0,5 ; 8] par : $f(x) = (-4x^2 + 5)\mathrm{e}^{-x} + 3$.

1. a. Pour tout x de [0,5 ; 8], $f(x) = (-4x^2 + 5)\mathrm{e}^{-x} + 3 = u(x) \times v(x) + 3$
avec $u(x) = -4x^2 + 5$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

On a $u'(x) = -8x$ et $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.

Attention !
$v(x) = \mathrm{e}^{w(x)}$ avec
$w(x) = -x$,
$v'(x) = w'(x)\mathrm{e}^{w(x)}$.

$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) + 0$ donc
$f'(x) = -8x \times \mathrm{e}^{-x} + (-4x^2 + 5)(-\mathrm{e}^{-x}) + 0$.
On factorise :
$f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(-8x - (-4x^2 + 5))$
donc $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(4x^2 - 8x - 5)$.

b. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que le polynôme du second degré $4x^2 - 8x - 5$.

Méthode
Avant de dresser le tableau de variations de la fonction, on étudie en détail le signe de sa dérivée.

Le discriminant de $4x^2 - 8x - 5$ est :
$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 144 = 12^2 > 0$
donc ce polynôme a deux racines :

$x_1 = \frac{8-12}{2\times4} = -\frac{1}{2} = -0,5$ et $x_2 = \frac{8+12}{2\times4} = \frac{5}{2} = 2,5$.

Le coefficient de x^2 est positif (car c'est 4) ,
on en déduit le signe de $4x^2 - 8x - 5$:

Valeurs de x	$-\infty$		$-0,5$		$2,5$		$+\infty$
Signe de $4x^2 - 8x - 5$		+	0	−	0	+	

La fonction f est définie sur [0,5 ; 8] et $f'(x)$ a le même signe que $4x^2 - 8x - 5$ donc on obtient le tableau de variations de f suivant :

Valeurs de x	0,5		2,5		8
Signe de $f'(x)$		−	0	+	
Variations de f	$4\mathrm{e}^{-0,5} + 3$	↘	$-20\mathrm{e}^{-2,5} + 3$	↗	$-251\mathrm{e}^{-8} + 3$

$f(0,5) \approx 5,43$; $f(2,5) \approx 1,36$; $f(8) \approx 2,92$.

Conseil
Le calcul des valeurs approchées de $f(0,5)$, $f(2,5)$ et $f(8)$ permet de vérifier la cohérence du sens des flèches.

c. Sur [0,5 ; 2,5], la fonction *f* est continue et strictement décroissante ;
3 est compris entre $f(0{,}5) \approx 5{,}43$ et $f(2{,}5) \approx 1{,}36$
donc d'après la propriété des valeurs intermédiaires,
l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution x_0 sur [0,5 ; 2,5].

Sur [2,5 ; 8], la fonction *f* est strictement croissante ;
le maximum de *f* est donc $f(8) \approx 2{,}92 < 3$
donc l'équation $f(x) = 3$ n'admet pas de solution sur [2,5 ; 8].

En conclusion, l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution x_0 sur [0,5 ; 8].

Méthode
On étudie les solutions de l'équation *f*(*x*) = 3 sur chaque intervalle où la fonction *f* est monotone, c'est-à-dire croissante ou décroissante.

À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$f(1{,}11) \approx 3{,}02$ et $f(1{,}12) \approx 2{,}99$.

Donc $1{,}11 < x_0 < 1{,}12$.

Conseil
On commence par régler le tableau de valeurs de la calculatrice avec un début à 0,5 et un pas à 0,1 pour encadrer x_0 à 0,1 près.

2. a. 500 L = 5 hL et $f(5) = (-4 \times 5^2)\mathrm{e}^{-5} + 3 \approx 2{,}36$
donc le coût moyen unitaire de production en euros pour une production de 500 litres de peinture est 236 €, arrondi à l'euro près

Conseil
Dans cette deuxième question, il faut faire attention aux unités :
- *x* est exprimé en hL soit en centaines de L
- *f*(*x*) est exprimé en centaines d'euros.

b. D'après le tableau de variations, *f* admet un minimum en 2,5 et ce minimum est $f(2{,}5) \approx 1{,}36$ donc l'entreprise doit produire 2,5 hL, soit 250L de peinture pour minimiser le coût moyen unitaire de production.
Ce coût est alors égal à 1,36 centaines d'euros soit 136 €.

c. D'après la question précédente, le coût moyen minimum par hectolitre est 136 €, donc si le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 100 euros, l'entreprise ne pourra pas réaliser de bénéfice.

Remarque
Pour que l'entreprise réalise un bénéfice, il faut que le prix de vente soit supérieur au coût.

d. Pour que l'entreprise réalise un bénéfice il faut que le coût moyen soit inférieur au prix de vente ce qui revient à résoudre l'inéquation $f(x) < 3$.

Valeurs de x	0,5	x_0	2,5		8
Signe de $f'(x)$	-		0	+	
Variations de f	$4e^{-0,5}+3$	3	$-20e^{-2,5}+3$		$-251e^{-8}+3$

$f(8) \approx 2{,}92$ donc $f(8) < 3$.

On a montré que $f(8) < 3$, donc d'après le tableau de variations de *f*, $f(x) < 3$ pour *x* dans l'intervalle $]x_0; 8]$:
comme $1{,}11 < x_0 < 1{,}12$, on en déduit que l'entreprise est rentable pour une production et une vente comprise entre 112 L et 800 L.

Attention !
x doit être strictement supérieur à x_0 , on choisit donc la valeur approchée par excès à 10^{-2} près de x_0.