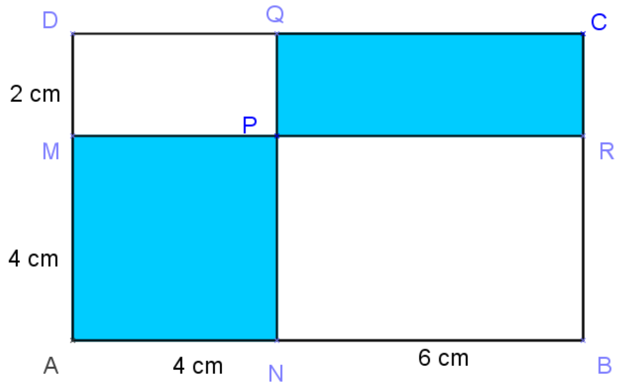
Exercice 141

1.a. Pour $x = 4$, on a AM = AN = 4 cm.

Figure réduite :



b. L'aire de AMPN est 4×4 cm^2 = 16 cm^2.
L'aire du rectangle PQCR est 2×6 cm^2 = 12 cm^2
En ajoutant ces deux aires, on obtient
$A(4) = 28$ cm^2.

2. Pour tout x de [0 ; 6], on a AM = AN = x donc l'aire de AMPN est donnée par : aire(AMPN) = x^2.
D'autre part ,

$$\text{CQ} = \text{PR} = 10 - x \text{ et } \text{QP} = \text{CR} = 6 - x.$$

Donc PQCR a pour aire :

$$\text{aire(PQCR)} = (10 - x) \times (6 - x)$$

Par conséquent en ajoutant ces deux aires :

$$A(x) = x^2 + (10 - x)(6 - x).$$

3. ➘ Méthode on utilise la méthode de l'exercice résolu 1 page 85 pour démontrer une « égalité pour tout x » : on transforme un membre pour obtenir l'autre ou on transforme les deux membres pour trouver une même 3^e expression.

a. On développe l'expression de $A(x)$ trouvée à la question précédente :

$$\begin{aligned} x^2 + (10 - x)(6 - x) &= x^2 + 60 - 10x - 6x + x^2 \\ &= 2x^2 - 16x + 60 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$A(x) = 2x^2 - 16x + 60 \text{ pour tout } x \text{ de } [0\,;6].$$

b. Pour tout x de [0 ; 6] on a :

$$\begin{aligned} 2(x - 4)^2 + 28 &= 2(x^2 - 8x + 16) + 28 \\ &= 2x^2 - 16x + 32 + 28 \\ &= 2x^2 - 16x + 60 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$A(x) = 2(x - 4)^2 + 28 \text{ pour tout } x \text{ de } [0\,;6].$$

➘ Rappel
L'aire $\mathcal{A}$ d'un rectangle se calcule par la formule :
$\mathcal{A} =$ longueur × largeur

➘ Conseil
Il faut bien observer les expressions avant de transformer.
On sait toujours développer mais pas toujours factoriser une expression ou une partie de celle-ci ...
Dans ces deux questions, on est donc parti à chaque fois de l'expression qui n'est pas développée pour retrouver l'expression développée.

4. **➘ Méthode** pour démontrer que A admet pour minimum k sur [0 ; 6] et l'atteint en une valeur a, il faut montrer que $A(x) \geq A(a)$ pour tout x de [0 ; 6].
En pratique on montre souvent ceci en deux étapes :
• étape 1 : montrer que pour tout x de [0 ; 6], $A(x) \geq k$.
• étape 2 : trouver une valeur a telle que $A(a) = k$.

Un carré est toujours positif ou nul donc $(x - 4)^2$ est toujours positif ou nul et en multipliant par 2, positif, on est sûr que $2(x-4)^2$ reste toujours positif ou nul.
De $A(x) = 2(x-4)^2 + 28$ on déduit donc que
$A(x)$ est toujours supérieure ou égale à 28 cm².

De plus $A(x) = 28$ si et seulement si $2(x-4)^2 = 0$ c'est-à-dire pour $x - 4 = 0$ ou encore $x = 4$.

Ceci signifie que pour tout x de [0 ; 6], $A(x) \geq A(28)$.
Autrement dit A admet 28 pour minimum et atteint ce minimum pour $x = 4$.
L'aire minimale est donc 28 cm². Elle est atteinte lorsque le point M est situé à 4 cm du point A (figure de la question 1. a.).

➘ Conseil
Bien comprendre ce raisonnement.
Déjà abordé au chapitre 2, il sera réutilisé aux chapitres 4 et 5.

5. Différentes stratégies sont possibles.

Avec une table de valeurs
Sur une calculatrice ou un tableur, on observe une table de valeurs de la fonction A en diminuant éventuellement le pas si nécessaire. On obtient ainsi a priori des valeurs approchées des solutions.

Avec un graphique
• Sur une calculatrice
On fait afficher la courbe représentant la fonction A et on utilise l'outil *Trace* pour repérer les points d'ordonnée 30 (environ) sur la courbe et obtenir leurs abscisses.
• Sur GeoGebra
On représente la courbe de la fonction A et la droite d'équation $y = 30$. On crée le point d'intersection des deux courbes et on lit ses coordonnées dans la fenêtre Algèbre.
On obtient ainsi a priori des valeurs approchées des solutions.

➘ Conseil
Savoir lire graphiquement des valeurs approchées des solutions d'une équation grâce à la calculatrice graphique, permet de contrôler les résultats que l'on obtient par le calcul même si ce n'est pas demandé dans l'énoncé !

<u>Algébriquement avec un logiciel de calcul formel</u>
On peut résoudre algébriquement en transformant l'équation $A(x) = 30$ en $A(x) - 30 = 0$ et en factorisant $A(x) - 30$ à l'aide d'un logiciel de calcul formel.
On obtient alors des valeurs exactes des solutions.

Remarque : avec un logiciel, on peut prendre n'importe quelle forme de $A(x)$. A la main, on devrait choisir la forme la plus appropriée, ici celle de la question 3. b. pour pouvoir factoriser :

$$\begin{aligned} 2(x-4)^2 + 28 = 30 &\Leftrightarrow (x-4)^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 4 - 1)(x - 4 + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 5 \text{ ou } x = 3 \end{aligned}$$