Exercice 140

Question 1

a. On utilise le résultat de la ligne 3 de GeoGebra :
$f(x) = 0$ équivaut à $2(x-1)(x-4) = 0$.
Un produit est nul si et seulement si un des facteurs est nul donc $2(x-1)(x-4) = 0$ si et seulement si $(x-1) = 0$ ou $(x-4) = 0$.
L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions : 1 et 4.

b. On utilise le résultat de la ligne 2 de GeoGebra :
$f(x) = -4$ équivaut à $f(x) + 4 = 0$.
Par la ligne 2 de GeoGebra, $f(x) + 4 = 0$ équivaut à $2(x-2)(x-3) = 0$.
Un produit est nul si et seulement si un des facteurs est nul.
donc $2(x-2)(x-3) = 0$
si et seulement si $(x-2) = 0$ ou $(x-3) = 0$.
L'équation $f(x) = -4$ a deux solutions : 2 et 3.

c. On utilise la ligne 3 de GeoGebra :
$$2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} = 2x^2 - 10x + 8 = f(x)$$
Or $2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$ est toujours positif ou nul.
Donc $2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}$ est toujours supérieur ou égal à $-\frac{9}{2}$.
On a donc $\boxed{\boldsymbol{f(x) \geq -\frac{9}{2}}}$.
De plus pour $x = \frac{5}{2}$, on a $x - \frac{5}{2} = 0$ donc $2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 = 0$
et par suite, $\boxed{\boldsymbol{f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{9}{2}}}$.

On en déduit que f a pour minimum $-\frac{9}{2}$ et que ce minimum est atteint en $\frac{5}{2}$.

Méthode

Pour résoudre $f(x) = k$,
1) on rassemble tous les termes dans le même membre. On arrive par exemple à $f(x) - k = 0$.
2) on utilise la forme factorisée de $f(x) - k$ pour se ramener à un produit nul
3) on utilise la propriété « un produit est nul *si est seulement si* l'un de ses facteurs est nul ».

Méthode

Pour démontrer que, sur $\mathbb{R}$, le minimum de f est m, atteint en a, on démontre que :
1) pour tout réel x, $f(x) \geq m$
2) $f(a) = m$

Question 2

Démontrons le résultat de la ligne 1

On calcule $f(x) + 4$:
$f(x) + 4 = 2x^2 - 10x + 8 + 4 = 2x^2 - 10x + 12$ pour tout x réel.
On développe $2(x-2)(x-3)$:

$2(x-2)(x-3) = 2[(x-2)(x-3)]$ *on va d'abord effectuer le produit des deux derniers facteurs*
$= 2[x^2 - 3x - 2x + 6]$ *on développe à l'intérieur des crochets*
$= 2[x^2 - 5x + 6]$ *on réduit à l'intérieur des crochets*
$= 2x^2 - 10x + 12$ *on finit de développer*

On constate donc que pour tout réel x, $f(x) = 2(x-2)(x-3)$.

Démontrons le résultat de la ligne 2

On développe $2(x-1)(x-4)$:

$2(x-1)(x-4) = 2[(x-1)(x-4)]$ *on va d'abord effectuer le produit des deux derniers facteurs*
$= 2[x^2-4x-x+4]$ *on développe à l'intérieur des crochets*
$= 2[x^2-5x+4]$ *on réduit à l'intérieur des crochets*
$= 2x^2-10x+8$ *on finit de développer*
On constate donc que pour tout réel x, $f(x) = 2(x-1)(x-4)$.

Démontrons le résultat de la ligne 3

On développe $2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{2}$.

● Développons déjà $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$.

On reconnaît l'identité remarquable
$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ avec $a = x$ et $b = \frac{5}{2}$
donc $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 = x^2-2\times x\times\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2 = x^2-5x+\frac{25}{4}$.

● On remplace dans $2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{2}$.

$2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{2} = 2\left(x^2-5x+\frac{25}{4}\right)-\frac{9}{2}$

● On développe et on réduit :

$2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{2} = 2x^2-10x+\frac{25}{2}-\frac{9}{2} = 2x^2-10x+8$.

On a donc bien $f(x) = 2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{2}$ pour tout réel x.