

Exercice 139

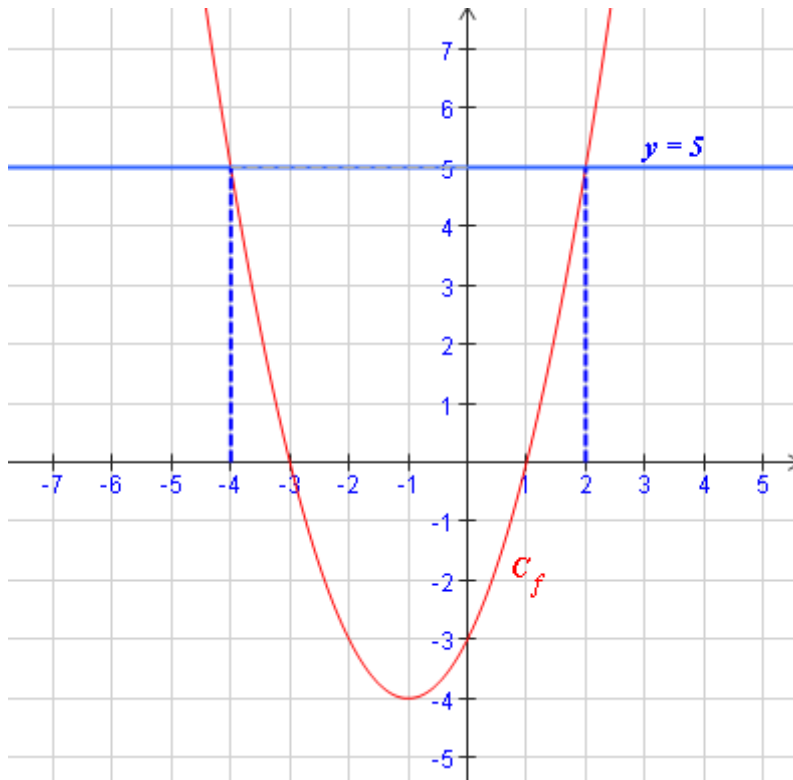
1. a. $f(-1) = -4$.

1. b. **🔗 Méthode** On utilise la méthode décrite dans le cours partie 3, page 86 :

- on repère 5 sur l'axe des ordonnées ;
- on repère les points de la courbe C_f qui ont pour ordonnée 5 ;
- on lit leurs abscisses : ce sont les solutions.

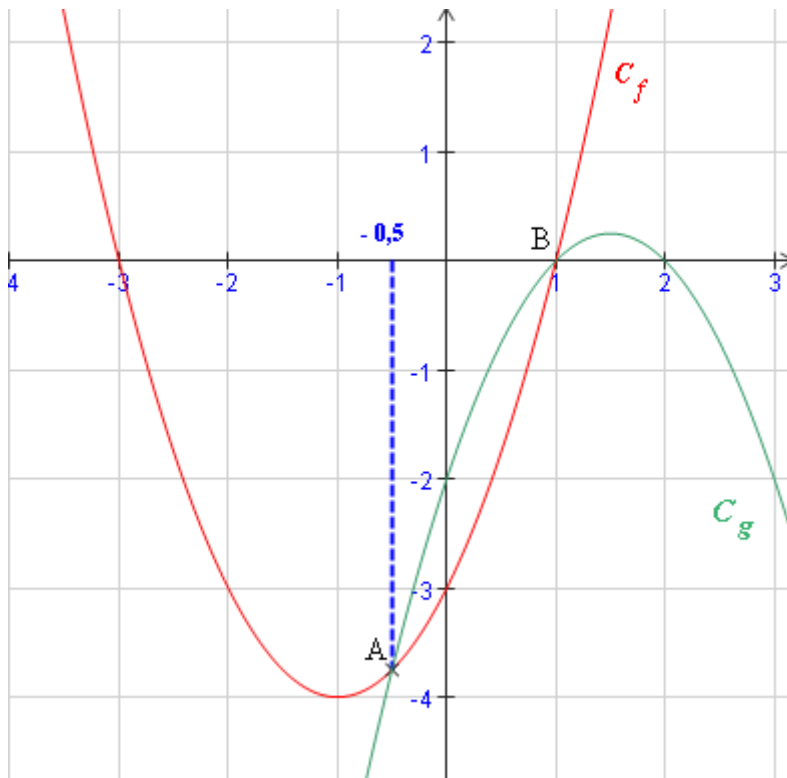
🔗 Conseil

Pour trouver tous les points d'ordonnée 5 sur la courbe C_f , on peut tracer la droite d'équation $y = 5$ et repérer tous ses points d'intersection avec la courbe C_f .
On lit ensuite leurs abscisses : ce sont les solutions.



Les solutions de l'équation $f(x) = 5$ sont 2 et -4 .

1. c. **➤ Méthode** On utilise la méthode décrite dans le cours partie 3, page 86.



➤ Conseil

Bien comprendre le raisonnement : le point d'abscisse x de C_f a pour coordonnées $(x; f(x))$.

Le point d'abscisse x de C_g a pour coordonnées $(x; g(x))$.

Dire que

$$f(x) = g(x)$$

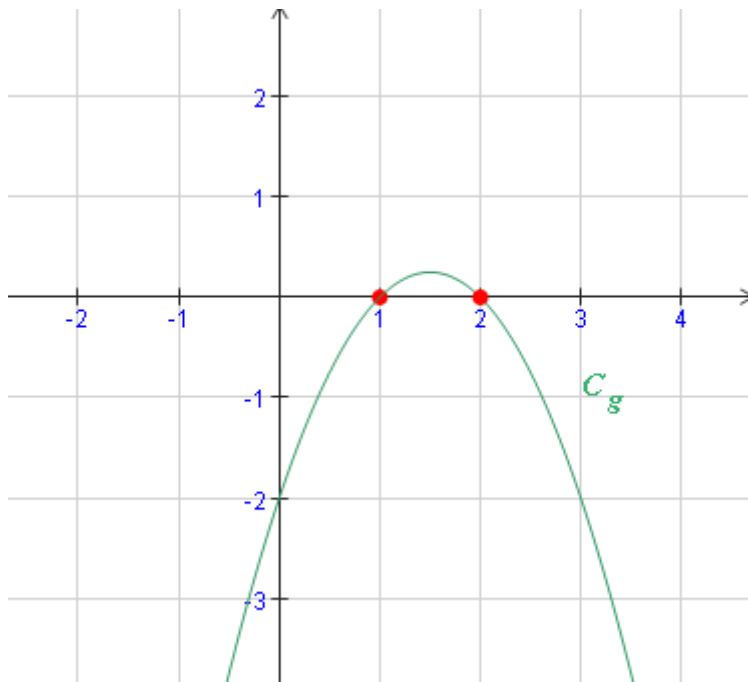
c'est dire que ces deux points ont les mêmes coordonnées, donc qu'ils sont confondus et de ce fait qu'ils sont communs aux deux courbes.

Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes C_f et C_g .

Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont $-0,5$ (environ) et 1 .

1. d. ➤ Méthode C'est un cas particulier de la méthode décrite dans le cours partie 3, page 86 : on cherche les points de la courbe C_g qui ont pour ordonnée 0, c'est-à-dire les points d'intersection de la courbe C_g avec l'axe des abscisses. On lit leurs abscisses : ce sont les solutions de l'équation $g(x) = 0$.

Les solutions de l'équation $g(x) = 0$ sont 1 et 2.



➤ Conseil

Bien savoir relier la résolution de l'équation $g(x) = 0$ et la recherche des points d'intersection de C_g avec l'axe des abscisses.

Ce lien sera beaucoup utilisé au chapitre 4.

2. On peut identifier f et g de plusieurs façons.
Voici deux solutions.

• Solution 1

On sait que $f(-1) = -4$ (question 1 a).

Pour $x = -1$, on a

$$(x - 1)(x + 3) = (-1 - 1)(-1 + 3) = -2 \times 2 = -4$$

et

$$(2 - x)(x - 1) = (2 - (-1))(-1 - 1) = 3 \times (-2) = -6$$

C'est donc $(x - 1)(x + 3)$ qui correspond à $f(x)$ et l'autre expression à $g(x)$.

• Solution 2

On sait que les solutions de l'équation $g(x) = 0$ sont 1 et 2 (question 1d).

Réolvons l'équation $(x - 1)(x + 3) = 0$:

$$(x - 1)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ OU } x + 3 = 0$$

Les solutions sont donc 1 et -3.

L'expression $(x - 1)(x + 3)$ ne peut donc pas correspondre à $g(x)$. C'est donc celle de $f(x)$.

D'où $f(x) = (x - 1)(x + 3)$

et $g(x) = (2 - x)(x - 1)$.

Remarque : on peut vérifier que l'équation $(2 - x)(x - 1) = 0$ a bien pour solutions 1 et 2.

Analyser l'énoncé :
les formes algébriques permettent de calculer des images et de résoudre certaines équations. Ceci permet de penser à confronter les résultats obtenus graphiquement à la question 1. avec ceux obtenus à l'aide des formes algébriques proposées.

Ensuite les expressions de $f(x)$ et $g(x)$ sont sous forme factorisée ce qui permet de résoudre les équations $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$. Ceci peut mettre sur la piste de la solution 2.

3. ➤ Méthode Cette équation ne se ramène pas à une équation du premier degré donc on rassemble tous les termes dans le premier membre puis on le factorise pour se ramener à un produit qui est égal à 0.

$$\begin{aligned}f(x) = g(x) &\Leftrightarrow (x - 1)(x + 3) = (2 - x)(x - 1) \\&\Leftrightarrow (x - 1)(x + 3) - (2 - x)(x - 1) = 0\end{aligned}$$

On factorise le premier membre par $(x - 1)$ qui est en facteur commun :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x - 1)[(x + 3) - (2 - x)] = 0$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x - 1)[x + 3 - 2 + x] = 0$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x - 1)(2x + 1) = 0$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ ou } 2x + 1 = 0$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

Remarque : on peut contrôler graphiquement ces résultats à l'aide des résultats de la question 1. c.

4. a. Démontrer que $f(x) = x^2 + 2x - 3$ pour tout x réel.

🔗 **Méthode** on applique la méthode de l'exercice résolu 1 page 85 en transformant l'un des membres pour arriver à l'autre.

On sait que $f(x) = (x - 1)(x + 3)$.

Il s'agit donc de démontrer que pour tout x réel,

$$(x - 1)(x + 3) = x^2 + 2x - 3.$$

Pour cela développons le premier membre.

$$(x - 1)(x + 3) = x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3.$$

On a donc pour tout x réel, $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

🔗 **Conseil**

Pour démontrer une « égalité pour tout réel x », il faut bien observer les expressions données.

Développer est souvent plus facile que factoriser, on a donc choisi ici de partir du membre de gauche (factorisé) pour le développer et arriver au membre de droite (développé).

4. b. Résoudre l'équation $f(x) = -4x - 12$.

➤ **Méthode** cette équation n'est pas du premier degré donc on rassemble tous les termes dans un membre puis on le factorise pour arriver à un produit qui est nul.

• **Solution 1** : avec la forme développée de $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) = -4x - 12 &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = -4x - 12 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \end{aligned}$$

On reconnaît une identité remarquable :

$$\begin{aligned} f(x) = -4x - 12 &\Leftrightarrow (x + 3)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -3 \end{aligned}$$

Cette équation a une unique solution : -3

• **Solution 2** : avec la forme factorisée de $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) = -4x - 12 &\Leftrightarrow (x - 1)(x + 3) = -4x - 12 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(x + 3) + 4x + 12 = 0 \end{aligned}$$

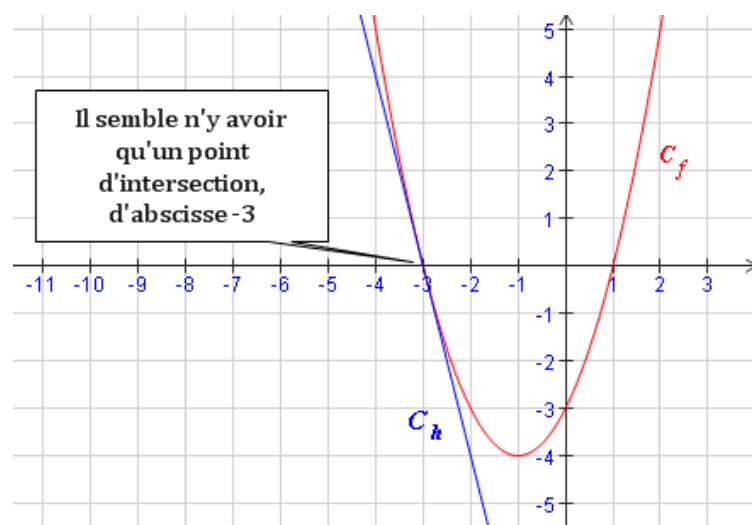
On peut factoriser par étapes :

$$\begin{aligned} f(x) = -4x - 12 &\Leftrightarrow (x - 1)(x + 3) + 4(x + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 3) [(x - 1) + 4] \\ &\Leftrightarrow (x + 3)(x + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -3 \end{aligned}$$

Cette équation a une unique solution : -3

• **Contrôler graphiquement le résultat**

Cette équation est de la forme $f(x) = h(x)$ avec $h(x) = -4x - 12$. On peut donc contrôler le résultat graphiquement en traçant la courbe représentative de h sur le même graphique que celle de f (à la main ou à la calculatrice) et en lisant les abscisses des points d'intersection des courbes représentant f et h .



➤ **Conseil**

Pour résoudre l'équation

$f(x) = -4x - 12$
il faut choisir la forme de $f(x)$ la mieux adaptée.

Le choix n'est pas toujours immédiat !
Il faut anticiper les calculs pour savoir quelle forme permettra, après avoir rassemblé tous les termes dans le premier membre, de le factoriser (pour arriver à un produit égal à 0). Ici, la forme développée ou la forme factorisée permettent d'aboutir mais ce n'est pas toujours le cas !