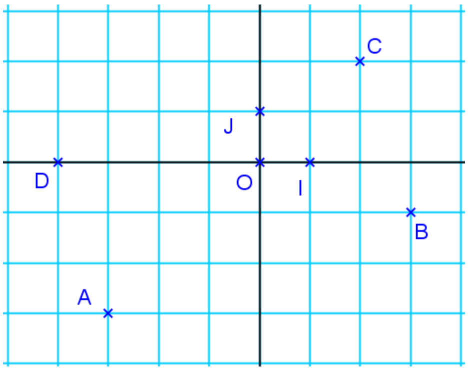
Exercice 114

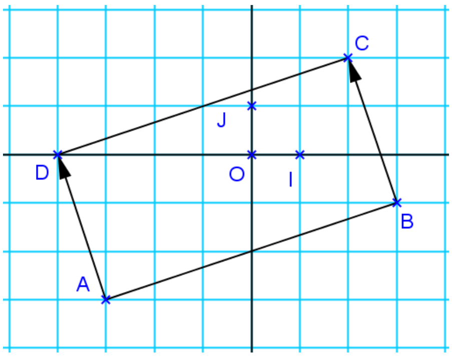
1.



2. a. Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$:
$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -4-(-3) \\ 0-(-3) \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
De même $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2-3 \\ 2-(-1) \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
On constate que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont les mêmes coordonnées donc ils sont égaux : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Conseil
On vérifie la cohérence de ces coordonnées sur la figure.

b. Par définition de l'égalité de deux vecteurs, dire que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ c'est dire que ADCB est un parallélogramme.



3. a. Sur la figure le triangle ABD semble rectangle en A. Démontrons-le.
AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ donc
AB = $\sqrt{(3-(-3))^2 + \left(-1-(-3)\right)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$

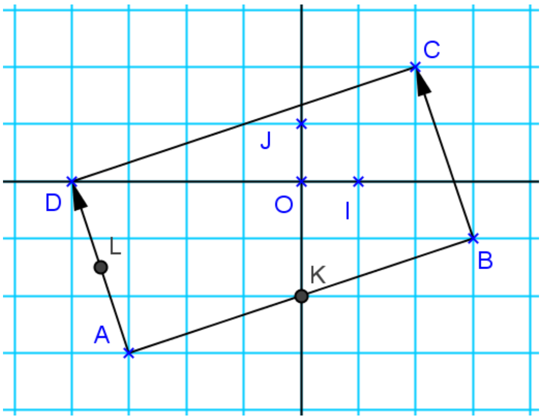
De même,
AD = $\sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$
BD = $\sqrt{(-4-3)^2 + (0-(-1))^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$
On constate que $AB^2 + AD^2 = BD^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABD est rectangle en A.

Méthode
On pourra revoir l'exercice résolu 3 page 244.

b. ABCD est un parallélogramme avec un angle droit, c'est donc un rectangle.

4. On sait que K $\left(\frac{x_A+x_B}{2} ; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$ voir chapitre 10.
D'où $x_K = \frac{-3+3}{2} = 0$ et $y_K = \frac{-3+(-1)}{2} = -2$.
On a donc K$(0 ; -2)$.

De même $x_L = \frac{-3-4}{2} = \frac{-7}{2}$ et $y_L = \frac{-3+0}{2} = \frac{-3}{2}$
d'où L$\left(-\frac{7}{2} ; -\frac{3}{2}\right)$ ou encore L $(-3,5 ; -1,5)$.

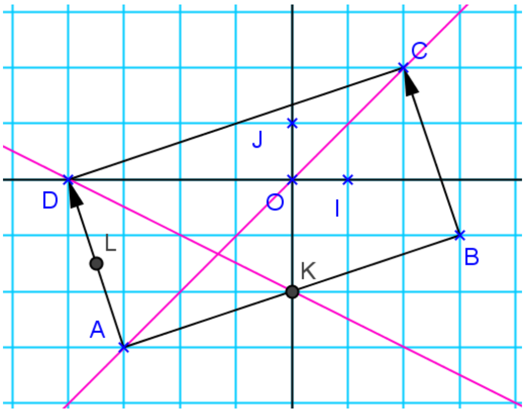


Conseil
On contrôle les résultats sur la figure.

5. a. Équation de (AC)
Coefficient directeur : $\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A} = \frac{2-(-3)}{2-(-3)} = 1$.
La droite (AC) a donc une équation de la forme $y = x + b$.
Le point C$(2 ; 2)$ appartient à la droite donc ses coordonnées vérifient l'équation $y = x + b$ de la droite c'est-à-dire :
$y_C = x_C + b$ d'où $2 = 2 + b$ et donc $b = 0$.
La droite (AC) a pour équation $y = x$.

Méthode
On utilise la méthode décrite dans l'exercice résolu 1 page 287.

Équation de (DK)
Coefficient directeur : $\frac{0-(-2)}{-4-0} = \frac{-1}{2}$.
La droite (DK) a donc une équation de la forme $y = -\frac{1}{2}x + b$.
Le point D$(0 ; -2)$ appartient à cette droite donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite $-2 = 0 + b$
d'où $b = -2$.
La droite (DK) a pour équation $y = -\frac{1}{2}x - 2$.



Conseil
On contrôle sur la figure les coefficients directeurs et les ordonnées à l'origine trouvés par le calcul.

b. Le point d'intersection E a ses coordonnées $(x_E\,;y_E)$ qui vérifient les équations des deux droites :

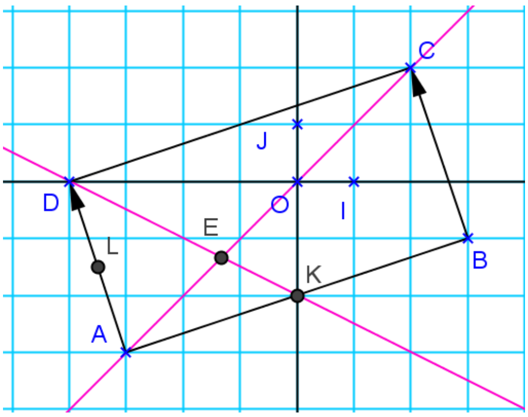
$y_E = x_E$ et $y_E = -\frac{1}{2}x_E - 2$.

On en déduit que $x_E = -\frac{1}{2}x_E - 2$

d'où $x_E + \frac{1}{2}x_E = -2$ ou encore $\frac{3}{2}x_E = -2$.

On a donc $x_E = -\frac{2}{\frac{3}{2}} = -2 \times \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$.

Comme $y_E = x_E$, on a finalement $E(-\frac{4}{3}\,;-\frac{4}{3})$.



Conseil

On contrôle les coordonnées de E sur la figure à l'aide de valeurs approchées :

$-\frac{4}{3} \approx -1{,}3$.

6. Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{LE}$ et $\overrightarrow{LB}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{LE}\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} - (-\frac{7}{2}) \\ -\frac{4}{3} - (-\frac{3}{2}) \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{LE}\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} + \frac{7}{2} \\ -\frac{4}{3} + \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ c'est-à-dire en réduisant au même dénominateur, $\overrightarrow{LE}\begin{pmatrix} -\frac{8}{6} + \frac{21}{6} \\ -\frac{8}{6} + \frac{9}{6} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{LE}\begin{pmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

De même $\overrightarrow{LB}\begin{pmatrix} 3 - (-\frac{7}{2}) \\ -1 - (-\frac{3}{2}) \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{LB}\begin{pmatrix} 3 + \frac{7}{2} \\ -1 + \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{LB}\begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On constate que $\overrightarrow{LB} = 3\,\overrightarrow{LE}$ (ou on vérifie que $\frac{13}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \times \frac{13}{2}$).

Les vecteurs $\overrightarrow{LE}$ et $\overrightarrow{LB}$ sont donc colinéaires. Les droites (LE) et (LB) sont de ce fait parallèles. Ayant L en commun, elles sont confondues et les points L, E et B sont donc alignés.

Méthode

Voir exercice résolu 9 page 319.