Exercice 112

1. Voir la figure à la question 2.

2. Coordonnées du point R

On appelle x_R *et* y_R les coordonnées du point R puis on calcule les coordonnées des différents vecteurs qui interviennent dans l'égalité :

$\overrightarrow{DR}\begin{pmatrix} x_R - (-2) \\ y_R - 4 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DR}\begin{pmatrix} x_R + 2 \\ y_R - 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} -1 - (-2) \\ 1 - 4 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $4\,\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{DR}$ et $4\,\overrightarrow{DE}$ sont égaux donc ils ont les mêmes coordonnées :

$x_R + 2 = 4$ et $y_R - 4 = -12$.

On obtient alors $x_R = 4 - 2 = 2$ et $y_R = -12 + 4 = -8$.

Finalement $R(2\,;\,-8)$.

Coordonnées du point S

De même $\overrightarrow{DS}\begin{pmatrix} x_S + 2 \\ y_S - 4 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\frac{1}{2}\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

On obtient alors :

$x_S + 2 = \frac{7}{2}$ et $y_S - 4 = 0$

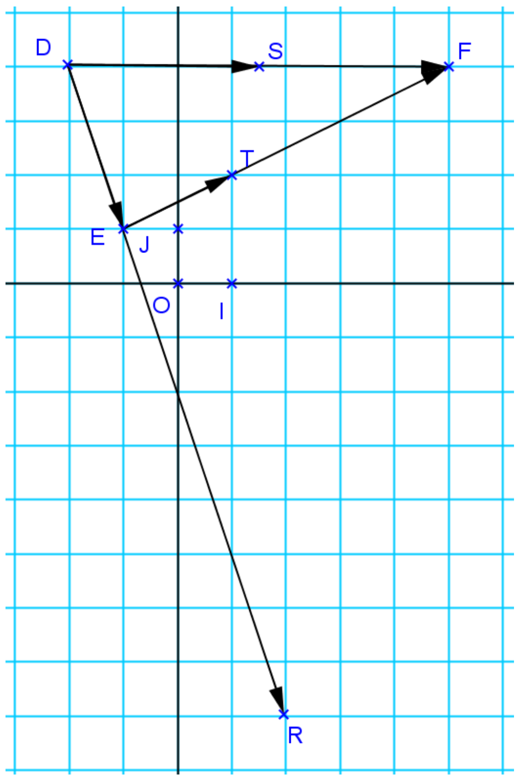
d'où $x_S = \frac{7}{2} - 2 = \frac{3}{2}$ et $y_S = 4$.

On a donc $S\left(\frac{3}{2}\,;4\right)$ ou encore S(1,5 ; 4).

Coordonnées du point E

De même $\overrightarrow{ET}\begin{pmatrix} x_T + 1 \\ y_T - 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $\frac{1}{3}\,\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a donc $x_T + 1 = 2$ et $y_T - 1 = 1$ d'où T(1 ; 2).



➘ Méthode

On utilise la méthode décrite dans l'exercice résolu 6, page 317.

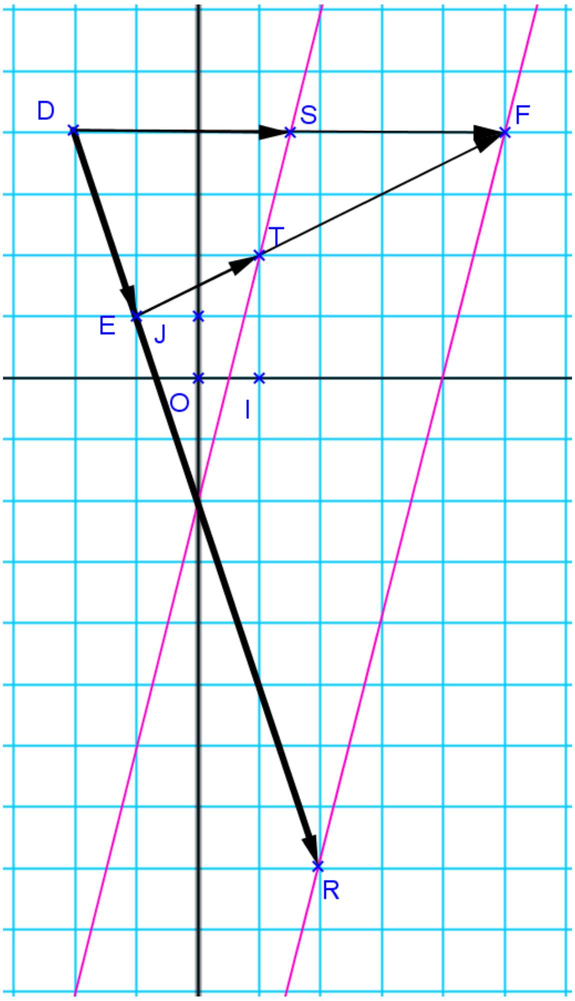
➘ Conseil

On place les points au fur et à mesure sur la figure et on vérifie la cohérence de ce que l'on a trouvé par le calcul. En particulier les points D, R et E doivent être alignés, D, S et F aussi, ainsi que E, T et F.

3. Pour étudier la position des droites on étudie la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{FR}$.

$\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}-0{,}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FR}\begin{pmatrix}-3\\-12\end{pmatrix}$.

On constate que $\overrightarrow{FR} = 6\,\overrightarrow{ST}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{FR}$ sont colinéaires.
Par conséquent, les droites (ST) et (FR) sont parallèles.



↘ Méthode
On utilise la méthode décrite dans l'exercice résolu 8 page 319.

↘ Conseil
Pour montrer que deux vecteurs sont colinéaires, il suffit de trouver par quel nombre on peut multiplier l'un pour obtenir l'autre.
Si ce coefficient n'apparaît pas simplement, on cherche si leurs coordonnées vérifient la condition « $xy' = x'y$ » (cours page 318).

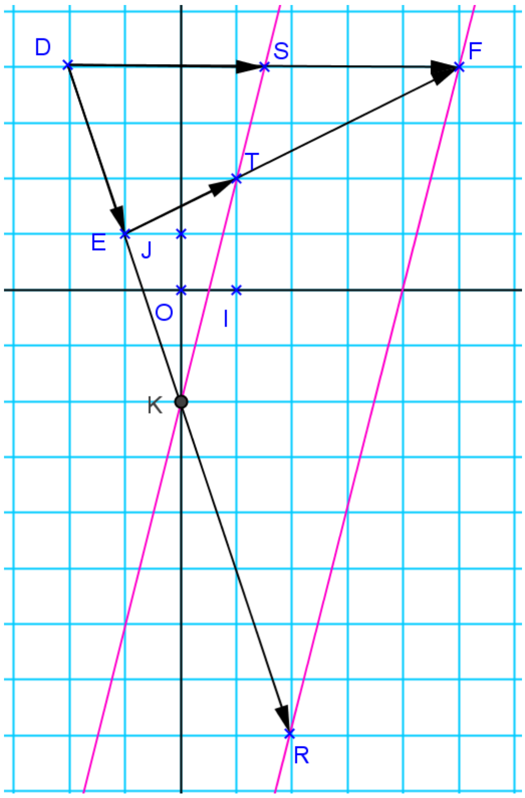
4. a. On sait que $K\left(\dfrac{x_D+x_R}{2}\,;\dfrac{y_D+y_R}{2}\right)$.
D'où $x_K = \dfrac{-2+2}{2} = 0$ et $y_K = \dfrac{4-8}{2} = -2$.
On a donc K(0 ; −2).

b. Cherchons si, par exemple, les vecteurs $\overrightarrow{TS}$ et $\overrightarrow{TK}$ sont colinéaires :
$\overrightarrow{TS}\begin{pmatrix}0{,}5\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{TK}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$. On a donc $\overrightarrow{TK} = -2\,\overrightarrow{TS}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{TS}$ et $\overrightarrow{TK}$ sont donc colinéaires.
Les droites (TS) et (TK) sont donc parallèles.
De plus elles ont un point commun T, elles sont donc confondues et les points S, T et K sont alignés.

↘ Conseil
On contrôle graphiquement les coordonnées de K.

↘ Méthode
Voir exercice résolu 9 page 319.
On n'est pas obligé de choisir $\overrightarrow{TS}$ et $\overrightarrow{TK}$, ce pourrait être $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{SK}$, ou $\overrightarrow{KS}$ et $\overrightarrow{TK}$, etc.

c. La figure obtenue est celle-ci :



De $\overrightarrow{DS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DF}$ on déduit que S est le milieu de [DF].
Or K est le milieu de [DR] donc d'après un théorème des milieux dans le triangle DRF les droites (SK) et (FR) sont parallèles.
Or d'après la question 3. les droites (ST) et (FR) sont parallèles.
Par suite les droites (ST) et (SK) sont parallèles.
Comme elles ont le point S en commun, elles sont donc confondues et S, T et K sont alignés.

➘ Méthode
« Sans calcul » incite à chercher à utiliser des propriétés de géométrie.
Il peut être utile de relire les résultats déjà démontrés dans les questions précédentes.