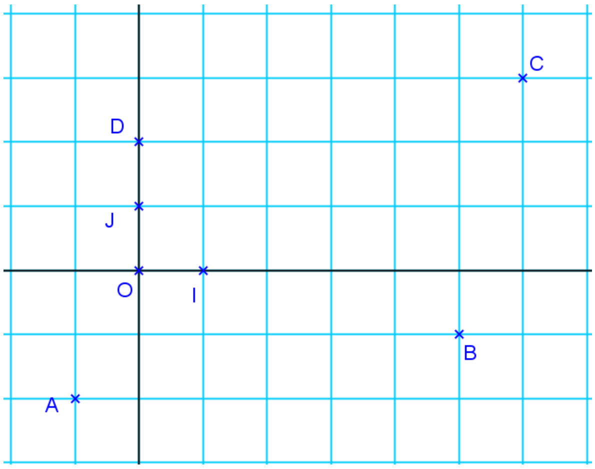
Exercice 111

1.



2. a. On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5-(-1) \\ -1-(-2) \end{pmatrix}$ et finalement $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Conseil
On contrôle graphiquement les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

b. Comme on a déjà calculé les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, nous calculons celles de $\overrightarrow{DC}$:

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 6-0 \\ 3-2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

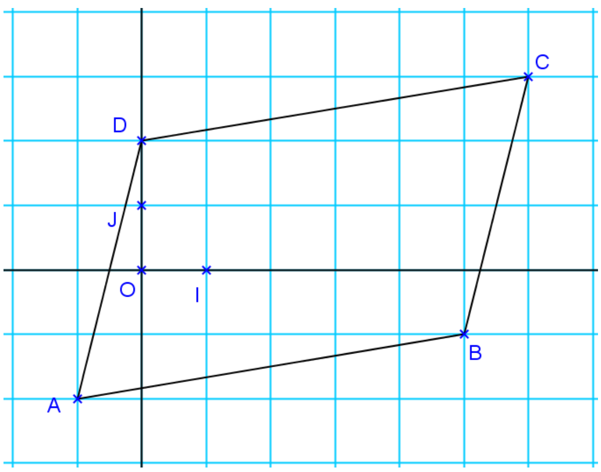
On constate que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont les mêmes coordonnées. Ces vecteurs sont donc égaux.

On en déduit que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

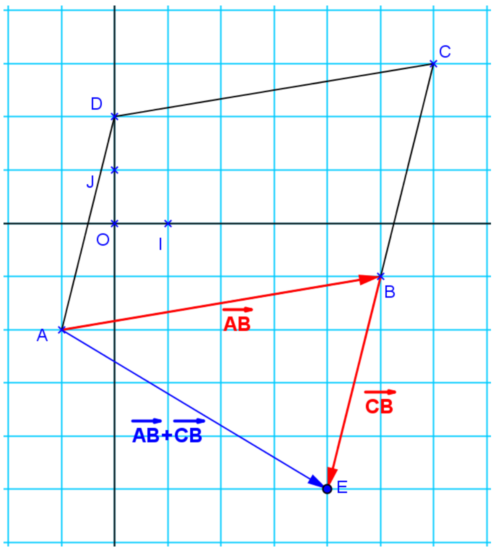
Méthode
On utilise la méthode décrite dans l'exercice résolu 3, page 315.

Conseils
Attention à l'ordre des points.
ABCD est un parallélogramme se traduit par $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

On peut vérifier graphiquement les coordonnées des vecteurs ainsi que le fait que ABCD est bien un parallélogramme.



3. Construction du point E



4. Nous allons utiliser l'égalité de la question précédente et exprimer que les vecteurs figurant dans chaque membre de l'égalité ont les mêmes coordonnées.

• Exprimons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AE}$.

Appelons x_E et y_E les coordonnées du point E. Alors

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x_E-(-1)\\y_E-(-2)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x_E+1\\y_E+2\end{pmatrix}$.

• Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.

On a $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}5-6\\-1-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ (question 2.)

On en déduit donc que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$.

• Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$ ont les mêmes coordonnées.

Donc $x_E+1=5$ et $y_E+2=-3$.

On en déduit que $x_E=5-1=4$ et $y_E=-3-2=-5$.

Le point E a donc pour coordonnées E $(4\,;-5)$

➘ Méthode
On utilise la méthode décrite dans l'exercice résolu 5, page 319.

➘ Conseil
On contrôle sur le graphique la cohérence des coordonnées de E trouvées par le calcul.

5. a. <u>Avec coordonnées</u>

On calcule les coordonnées des deux vecteurs et on vérifie qu'ils ont les mêmes coordonnées.

$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}4-5\\-5-(-1)\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$.

De même, on trouve $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ donc $-\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$

On constate que $\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{BC}$.

<u>Sans coordonnées</u>

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$ par définition de E.

Or $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$ par la relation de Chasles

donc $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}$.

b. On peut déduire de l'égalité $\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{BC}$ que B est le milieu du segment [CE].