Exercice 88

1. Le raisonnement de cet élève est juste jusqu'à l'affirmation AN = AP.
Mais de AN = AP, on peut juste déduire que A est équidistant de N et P donc que A appartient à la médiatrice de [NP].
Pour pouvoir dire que A est le milieu de [NP], il faudrait savoir en plus que A est aligné avec N et P.

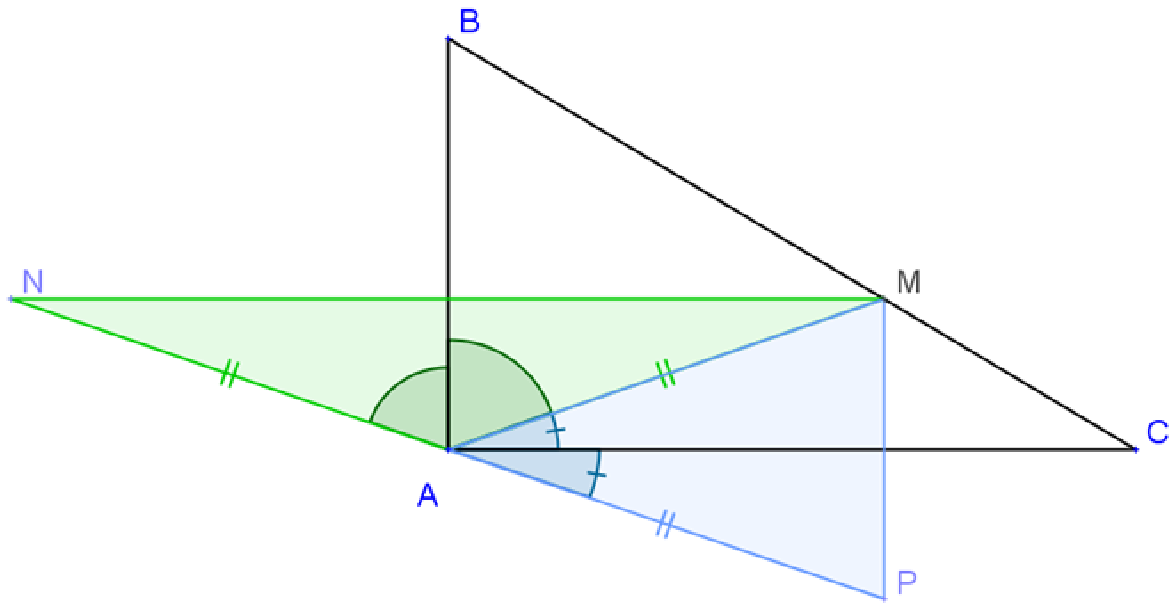
Attention à la définition du milieu d'un segment :
A est le milieu du segment [NP] équivaut à deux choses :
- A appartient au segment [AP]
- AN =AP

Il faut bien vérifier les deux pour pouvoir affirmer que A est le milieu de [NP].

2. **Une solution dans un repère**
On choisit le repère (A, C, B). On appelle $(x\,;y)$ le couple de coordonnées de M.

Alors N a pour coordonnées $(-x\,;\,y)$ et $P(x\,;-y)$.
Le milieu de [NP] a donc pour abscisse $\frac{x_N+x_P}{2}=\frac{-x+x}{2}=\frac{0}{2}=0$
et pour ordonnée $\frac{y_N+y_P}{2}=\frac{y+(-y)}{2}=\frac{0}{2}=0$.
Le milieu de [NP] a donc pour coordonnées $(0\,;\,0)$. C'est l'origine du repère donc le point A.

Une solution sans repère
On peut reprendre le raisonnement de l'élève pour montrer que AM = AN et AM = AP.
Il reste à montrer que A appartient au segment [NP]. Pour cela, nous allons montrer que $\widehat{NAP}$= 180°.



Comme AN = AM , le triangle NAM est isocèle en A. N étant symétrique par rapport à (AB), la droite (AB) est la médiatrice de [NM] donc aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{NAM}$. Donc $\widehat{NAB}=\widehat{BAM}$.

De même, le triangle PAM est isocèle en A donc la droite (AC), médiatrice de [MP] est bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{PAM}}$. Donc $\boldsymbol{\widehat{\mathrm{PAC}} = \widehat{\mathrm{CAM}}}$**.**

Alors $\widehat{\mathrm{NAP}} = 2 \times \widehat{\mathrm{BAM}} + 2 \times \widehat{\mathrm{MAC}} = 2\left(\widehat{\mathrm{BAM}} + \widehat{\mathrm{MAC}}\right) = 2 \times \widehat{\mathrm{BAC}}$.

Comme le triangle ABC est rectangle en A, $\widehat{\mathrm{BAC}} = 90\,°$ donc $\widehat{\mathrm{NAP}} = 180°$.

En conclusion, on a AN = AP et A appartient au segment [NP] donc A est le milieu de (NP].