**Exercice 56**

**1. a.** Le tirage d'une boule de l'urne est une épreuve de Bernoulli dont les issues sont R «la boule est rouge » et son contraire $\overline{\mathrm{R}}$. En répétant cette épreuve 3 fois, avec remise, donc de façon indépendante, on réalise un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{2}{5} = 0{,}4$, si l'on choisit R pour succès.

**b.** La variable aléatoire donnant le nombre de succès obtenus lors de ces 3 épreuves suit la loi binomiale B(3 ; 0,4).

**c.** Par propriété,
$\mathrm{E(X)} = np = 1{,}2$ ;
$\mathrm{V(X)} = np(1 - p) = 0{,}72$
et $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{0{,}72} \approx 0{,}85$.

**2. a.** Comme la somme des probabilités des 3 issues est égale à 1, la loi de probabilité de Y est donnée par :

| $k$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| P(Y = $k$) | 0,1 | 0,6 | **0,3** |

**b.** $\mathrm{E(Y)} = \sum_{k=0}^{k=2} k\ \mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = 1{,}2$
$\mathrm{V(Y)} = \sum_{k=0}^{k=2} k^2\ \mathrm{P}(\mathrm{X} = k) - \mathrm{E(Y)}^2 = 1{,}8 - 1{,}44$
$= 0{,}36$
$\sigma(\mathrm{Y}) = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$

**3. a.** $\mathrm{G_1} = 3\mathrm{X} - 2(3 - \mathrm{X}) = 5\mathrm{X} - 6$ ;
de même $\mathrm{G_2} = 5\mathrm{Y} - 6$.

**b.** $\mathrm{E(G_1)} = 5\ \mathrm{E(X)} - 6 = 0$ ;
$\mathrm{E(G_2)} = 5\ \mathrm{E(Y)} - 6 = 0$ ;
$\sigma(\mathrm{G1}) = 5\ \sigma(\mathrm{X}) \approx 4{,}25$ ;
$\sigma(\mathrm{G2}) = 5\ \sigma(\mathrm{Y}) = 3$.

**c.** Comme $\mathrm{E(G_1)} = \mathrm{E(G_2)} = 0$, les deux jeux sont équitables. Comme $\sigma(\mathrm{G1}) > \sigma(\mathrm{G2})$, les gains sont plus dispersés autour de leur moyenne 0 dans le jeu avec remise.

Le jeu le plus risqué et le jeu avec remise pour cette même raison.
Mais on peut aussi remarquer que le risque de perdre 6 euros à l'issue d'une partie est plus de deux fois plus grand dans le jeu avec remise.
En effet, on a :
$\mathrm{P(G_1} = -6) = \mathrm{P(X} = 0) = 0{,}216$
et $\mathrm{P(G_2} = -6) = \mathrm{P(Y} = 0) = 0{,}1$.

**Prolongement**

Si la question de la justification des probabilités P(Y = 0) = 0,1 et P(Y = 1) = 0,6 était posée, il faudrait déjà observer que l'on n'est pas ici en présence d'un schéma de Bernoulli, puisque les tirages réalisés ne se font pas dans les mêmes conditions et ne sont donc pas indépendants, vu que la boule tirée n'est pas replacée dans l'urne avant le tirage suivant. Même si, ici aussi, Y compte les succès « boule rouge », la loi de probabilité de Y ne peut être binomiale.
Pour déterminer la loi de Y, on peut supposer les boules numérotées : r1, r2, n1, n2, n3, et écrire tous les tirages possibles de trois boules (il y en a 10). Il reste à compter parmi ceux-ci combien comportent 0 boule rouge, 1 boule rouge et 2 boules rouges. L'équiprobabilité des 10 issues donne alors les probabilités cherchées grâce à la formule « nombre de cas favorables / nombre de cas possibles ».