Exercice 55

1. Dans une population où la proportion de clients satisfaits est 92 %, le nombre de clients satisfaits sur un échantillon de taille 540 prélevé au hasard dans cette population définit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale B(540 ; 0,92).

La fréquence de clients satisfaits sur un tel échantillon de taille 540 est donnée par la variable aléatoire F = $\frac{X}{540}$.

Un intervalle de fluctuation à 95 % de F est alors de la forme $[\frac{a}{540} ; \frac{b}{540}]$ où a et b sont les plus petits entiers tels que :
$P(X \leq a) \geq 0{,}025$ et $P(X \leq b) > 0{,}975$.

À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur (voir fichier sur le site), on obtient :

a = 484 et b = 509

d'où l'intervalle cherché : I = [0,8963 ; 0,9426].

2. a. Lors de l'enquête réalisée sur 540 clients, la fréquence de clients satisfaits est $f = \frac{505}{540} \approx 0{,}9352$.

b. Comme la fréquence f observée lors de l'enquête appartient à I, on considère que l'écart entre f et p = 0,92 n'est pas significatif. Au vu de cette enquête, on ne peut donc pas rejeter, au seuil de 95 %, l'hypothèse selon laquelle la publicité faite par cette entreprise est honnête.

Méthode

Si X suit la loi binomiale B(n ; p), un intervalle de fluctuation à 95% de la fréquence du succès F = X/n est de la forme $[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}]$ où a et b sont les plus petits entiers tels que :
$P(X \leq a) \geq 0{,}025$
et $P(X \leq b) > 0{,}975$.
Si le seuil choisi est 90 %, il suffit de remplacer 0,025 et 0,975 par 0,05 et 0,95.

Conseil

Pour déterminer les plus petits entiers a et b tels que :
$P(X \leq a) \geq 0{,}025$
et $P(X \leq b) > 0{,}975$, on peut tabuler $P(X \leq k)$
- soit sur une calculatrice à l'aide de la fonction **binomREP(n, p, k)** ou **binomCD(k, n, p)** (voir « Des fonctions utiles en probabilités » rappelées sur les rabats de la couverture).
- soit sur un tableur à l'aide de la formule
= LOI.BINOMIALE(k ;n ;p ;1) ou
= LOI.BINOMIALE(k ;n ;p ;vrai)

2. a. Comme la somme des probabilités des 3 issues est égale à 1, la loi de probabilité de Y est donnée par :

k	0	1	2
P(Y = k)	0,1	0,6	**0,3**

b. E(Y) = $\sum_{k=0}^{k=2} k\ P(\mathrm{X} = k)$ = 1,2
V(Y) = $\sum_{k=0}^{k=2} k^2\ P(\mathrm{X} = k)$ – E(Y)^2
= 1,8–1,44 = 0,36
$\sigma(\mathrm{Y}) = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$

3. a. G_1 = 3X – 2(3 – X) = 5X – 6 ;
de même G_2 = 5Y – 6
b. E(G_1)= 5 E(X)-6 = 0 ; E(G_2)= 5 E(Y) – 6 = 0$\sigma(\mathrm{G1}) = 5\ \sigma(\mathrm{X})\ \approx$ 4,25 ; $\sigma(\mathrm{G2}) = 5\ \sigma(\mathrm{Y}) = 3$.
c. Comme E(G_1) = E(G_2) = 0, les deux jeux sont équitables.
Comme $\sigma(\mathrm{G1}) > \sigma(\mathrm{G2})$, les gains sont plus dispersés autour de leur moyenne 0 dans le jeu avec remise.
Le jeu le plus risqué est le jeu avec remise pour cette même raison. Mais on peut aussi remarquer que le risque de perdre 6 euros à l'issue d'une partie est plus de deux fois plus grand dans le jeu avec remise. En effet, on a :
P(G_1 = – 6) = P(X = 0) = 0,216
et P(G_2 = – 6) = P(Y = 0) = 0,1.

Conseil

Si la question de la justification des probabilités P(Y = 0) = 0,1 et P(Y = 1) = 0,6 était posée, il faudrait déjà observer que l'on n'est pas ici en présence d'un schéma de Bernoulli, puisque les tirages réalisés ne se font pas dans les mêmes conditions et ne sont donc pas indépendants, vu que la boule tirée n'est pas replacée dans l'urne avant le tirage suivant. Même si, ici aussi, Y compte les succès « boule rouge », la loi de probabilité de Y ne peut être binomiale.

Méthode

Pour déterminer la loi de Y, on peut supposer les boules numérotées : r1, r2, n1, n2, n3, et écrire tous les tirages possibles de trois boules (il y en a 10). Il reste à compter parmi ceux-ci combien comportent 0 boule rouge, 1 boule rouge et 2 boules rouges. L'équiprobabilité des 10 issues donne alors les probabilités cherchées grâce à la formule « nombre de cas favorables / nombre de cas possibles).