Exercice 53

La visite d'un client, répétée 10 fois, de façon indépendante, est un schéma de Bernoulli, où le succès S : « la rencontre a lieu » a pour probabilité $p = 0{,}8$.

Méthode

Pour établir qu'une variable aléatoire X suit une loi B(n ; p), il faut s'assurer :

- que l'expérience aléatoire constitue un schéma de Bernoulli
- **et** que X compte le nombre de succès obtenus lors des n épreuves répétées.

1. La variable aléatoire X donne le nombre de succès réalisés au cours des 10 visites.
Donc X suit la loi binomiale B(10 ; 0,8).
Ainsi pour tout entier k compris entre 1 et 10,
$P(X = k) = \binom{10}{k}(0{,}8)^k(0{,}2)^{10-k}$.

Conseil

Le contexte d'un schéma de Bernoulli n'est pas suffisant pour affirmer que la variable aléatoire associée suit une loi binomiale. Il faut regarder si cette variable compte bien le nombre de succès. On pourra voir ou revoir l'exercice **5** page 235.

2. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$
Le calcul de P(X = 0) peut se faire en appliquant l'expression générale de la loi binomiale :
$P(X = 0) = \binom{10}{0}(0{,}8)^0(0{,}2)^{10} = 0{,}2^{10}$
Mais on peut aussi remarquer qu'un seul chemin de l'arbre représentant le schéma de Bernoulli réalise l'événement X=0 . Ce chemin se code $\overline{S}\overline{S}\overline{S} \ldots \overline{S}\overline{S}$ où l'échec $\overline{S}$ est répété 10 fois.
Sa probabilité est alors spontanément $0{,}2^{10}$.
D'où $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$
$= 1 - 0{,}2^{10} \approx 0{,}0000001$

Méthode

Le contraire de « AU MOINS UN » est « AUCUN ».
Ainsi :
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

3. $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leq 4)$.
Or $P(X \leq 4) = \sum_{k=0}^{k=4} P(X = k) \approx 0{,}0063694$
d'où $P(X \geq 5) \approx 0{,}9936306$.
À 10^{-3} près :
$P(X \geq 5) \approx 0{,}994$.

4. $E(X) = np = 10 \times 0{,}8 = 8$
Le nombre moyen de clients rencontrés sur un grand nombre de « tournées de 10 visites » est donné par E(X).
Ainsi, Monsieur C. peut espérer rencontrer 8 clients.

Méthode

Lorsque X suit une loi binomiale, le calcul de $P(X = k)$ ou de $P(X \leq k)$ est aisé, car on dispose sur une calculatrice ou un tableur de fonctions préprogrammées.
Sur un tableur,

- $P(X = k)$ est donné par :
= LOI.BINOMIALE(k ;n ;p ;0) ou
= LOI.BINOMIALE(k ;n ;p ;FAUX)
- $P(X \leq k)$ est donné par :
= LOI.BINOMIALE(k ;n ;p ;1) ou
= LOI.BINOMIALE(k ;n ;p ;VRAI)