Exercice 62

1. a. Lorsqu'on effectue 10 lancers d'une pièce de monnaie équilibrée, l'événement E_2 : « on obtient un premier PILE lors du second lancer » peut se coder ($F\overline{F}$????????), avec F pour « face », $\overline{F}$ pour « pile » et « ? » pour « PILE ou FACE », ou plus simplement ($F\overline{F}$), puisque la réalisation de l'événement ne dépend que des résultats des 2 premiers lancers. On a $p(E_2)=\frac{1}{2}x\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

b. « On obtient un premier PILE lors des 4 premiers lancers » est l'événement $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$ où E_k est l'événement « obtenir le premier pile au $k^{\text{ème}}$ lancer ».
Ces 4 événements étant incompatibles 2 à 2, on a :
$p(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) =$
$$p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) + p(E_4).$$
En procédant comme pour le calcul de p(E_2), à la question **a.**, on obtient :
$p(E_1) = p(\overline{F}) = \frac{1}{2}$
$p(E_3) = p(FF\overline{F}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
$p(E_4) = p(FFF\overline{F}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$
Il en résulte :
p(« obtenir le premier pile lors des 4 premiers lancers ») = 1/2+1/4+1/8+1/16 =15/16.

2. a. « Obtenir au moins un PILE lors des n lancers » a pour événement contraire « N'obtenir aucun PILE lors des n lancers ». Ce dernier événement a l'avantage de la simplicité.
Il se code (FFF… FF), avec F répété n fois.
D'où p(« Obtenir au moins un PILE lors des n lancers ») = 1 - p(FFF… FF) = $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b. Comme $p_n \leq 1$, dire que $p_n \approx 1$ à 10^{-6} près signifie que $1 - 10^{-6} \leq p_n \leq 1$. D'où un algorithme :

```
VARIABLE :          n nombre
INITIALISATION :    n prend la valeur 1
TRAITEMENT :
    Tantque 1 – (1/2)^n < 1 – 10^-6 Faire
      | n prend la valeur n + 1
    FinTanque
SORTIE :            Afficher n
```

Méthode

Dans le cas de la répétition d'expériences aléatoires identiques et indépendantes, que l'on peut représenter par un arbre, la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par les branches du chemin.
Alors, que l'on ait ou non illustré cette situation par un arbre, il faut retenir que le modèle de probabilité d'une répétition d'expériences identiques et indépendantes est la loi « produit ».

Conseil

Dans la question **1.a.** il est astucieux et avantageux de remarquer que l'événement contraire de « on obtient un premier PILE lors des 4 premiers lancers » est : « on n'obtient aucun PILE lors des 4 premiers lancers », qui se code ($\overline{F}\overline{F}\overline{F}\overline{F}$) et dont la probabilité est $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 16$.
La probabilité cherchée est alors 1-1/16 = 15/16.

Conseil

Dans cette boucle Tantque … FinTantque, on entre une dernière fois dans la boucle quand n est le plus grand entier tel que $p_n < 1 - 10^{-6}$ et on augmente la valeur de n d'une unité.
Au « tour suivant », on ne rentre plus dans la boucle et n contient bien la première valeur telle que l'on n'ait plus $p_n < 1 - 10^{-6}$ c'est-à-dire tel que $1 - 10^{-6} \leq p_n$.