

Exercice 68

1. Il semble géométriquement que d'un triangle au suivant, le périmètre et l'aire diminuent, autrement dit que les suites (p_n) et (a_n) soient décroissantes.

2. Par le théorème des milieux dans le triangle $A_nB_nC_n$, on a :

$$A_{n+1}B_{n+1} = \frac{1}{2} A_nB_n ; B_{n+1}C_{n+1} = \frac{1}{2} B_nC_n ,$$

et $A_{n+1}C_{n+1} = \frac{1}{2} A_nC_n$.

Par conséquent, en sommant ces trois longueurs, $p_{n+1} = \frac{1}{2} p_n$ pour tout $n \geq 0$.

On en déduit que la suite (p_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc $p_n = p_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Calculons p_0 : $p_0 = A_0B_0 + B_0C_0 + C_0A_0$.

Le triangle $A_0B_0C_0$ étant rectangle en A_0 , par le théorème de Pythagore, on obtient, en cm :

$$B_0C_0 = \sqrt{A_0B_0^2 + A_0C_0^2} = 10$$

Donc $p_0 = 6 + 10 + 8 = 24$.

Par conséquent pour tout $n \geq 0$, $p_n = 24 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b. Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, la suite $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ est décroissante. Autrement dit pour tout $n \geq 0$,

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ d'où, en multipliant par 24 qui est positif, $p_{n+1} < p_n$.

La suite (p_n) est donc décroissante.

c. On entre la suite (p_n) sur une calculatrice ou sur un tableur et on cherche sur la table de valeurs de la calculatrice ou sur le tableur la première valeur de n telle que $p_n < 0,1$.

Conseils

- Ne pas oublier de tenir compte des unités : p_n est exprimé en cm, il faut donc convertir 1 mm en 0,1 cm.
- On pourrait aussi créer un programme qui calcule p_n tant que $p_n > 0,01$. Ceci est surtout intéressant si on a plusieurs tests à faire ou si la valeur de n cherchée est très grande ce qui n'est pas le cas ici.
- Sur un tableur, on peut ajouter un test. Sur la copie d'écran ci-contre en colonne C,

	A	B	C	D
1	n	p_n		
2	0	24	=24*(1/2)^A2	
3	1	12		
4	2	6		
5	3	3		
6	4	1,5		
7	5	0,75		
8	6	0,375		
9	7	0,1875		
10	8	0,09375		
11	9	0,046875		

(voir copie d'écran calculatrice page 346.)

on peut tester si le résultat obtenu en colonne B est inférieur ou non à 0,01 en entrant dans la cellule C2 puis en recopiant vers le bas la formule

=SI(B2<0,01;"oui";"")

En colonne C sera alors affiché «oui» si le résultat en colonne B sur la même ligne est inférieur à 0,01 et il ne sera rien affiché sinon.

On trouve $n = 8$.

Les triangles dont le périmètre est supérieur à 1 mm sont donc les triangles $A_0B_0C_0, A_1B_1C_1, \dots, A_7B_7C_7$: ils sont au nombre de 8.

3. a. Le triangle $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ est une réduction du triangle $A_nB_nC_n$ de rapport $\frac{1}{2}$ d'après la question

2. a. Donc le rapport des aires est égal à $\frac{1}{4}$ soit

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n \text{ pour tout } n \geq 0.$$

La suite (a_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ donc $a_n = a_0 \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Or le triangle $A_0B_0C_0$ étant rectangle en A_0 , son aire, en cm^2 , est donnée par :

$$a_0 = \frac{1}{2}A_0B_0 \times A_0C_0 = 24.$$

Donc pour tout $n \geq 0$, $a_n = 24 \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

b. Le raisonnement est analogue à celui de la question **2. b.** La suite (a_n) est décroissante.

c. On cherche la première valeur de n telle que

$a_n < 0,01$ (car $1 \text{ mm}^2 = 0,01 \text{ cm}^2$) sur la table de valeurs de la calculatrice ou sur un tableur.

	A	B	C	D
1	n	a_n		
2	0	24		
3	1	6	$=24*(1/4)^A2$	
4	2	1,5		
5	3	0,375		
6	4	0,09375		
7	5	0,0234375		
8	6	0,00585938		
9	7	0,00146484		

On obtient $n = 6$.

Il y a donc 6 triangles d'aires supérieures à 1 mm^2 : $A_0B_0C_0, \dots, A_5B_5C_5$.