Exercice 67

1. a. Par énoncé, les quantités d'eau, en litres, versées chaque minute forment une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Ayant $v_1 = \frac{1}{2}$, on en déduit que

$$v_n = v_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ pour } n \geq 1.$$

b. $V_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$

$$V_n = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$V_n = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$$

$$V_n = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ pour } n \geq 1.$$

2. On souhaite choisir une contenance t exprimée en litres ($0 \leq t \leq 1$) et savoir au bout de quel nombre n de minutes il manquera moins de t litres pour remplir le récipient.

Autrement dit, t étant donné, on cherche n tel que $1 - t < V_n$.

Algorithme :

VARIABLES :	n, V, t, nombres
ENTREE :	Saisir t
INITIALISATION :	n prend la valeur 1
TRAITEMENT :	Tant que $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1 - t$ Faire
	n prend la valeur n+1
	FinTantque
SORTIE :	Afficher n

Remarques :

- On aurait aussi pu transformer l'inéquation $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1 - t$ en $\left(\frac{1}{2}\right)^n > t$.

Voir le corrigé de l'exercice page 346.

- En faisant tourner l'algorithme ou en le programmant on obtient :

- pour $t = 0{,}01$: $n = 7$. Il manquera moins de 1 cL d'eau au bout de 7 minutes.
- pour $t = 0{,}001$: $n = 10$. Il manquera moins de 1 mL d'eau au bout de 10 minutes.

Méthode

Pour calculer une somme des termes d'une suite géométrique : on met le premier terme en facteur pour pouvoir ensuite appliquer la formule donnant $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ (propriété **4** page 134)

Conseils

Il faut déjà analyser la question :

- traduire ce que doit faire l'algorithme avec les variables en jeu dans la situation ;
- identifier une répétition : calculer V_n pour $n = 1$, $n = 2, n = 3$, etc. Il faut donc utiliser une boucle ;
- choisir le type de boucle : on connaît la condition d'arrêt donc on choisit une boucle « Tant que… Fin tant que ».
- Bien réfléchir à l'affichage : doit-on afficher la dernière valeur prise par n ou celle d'avant ?
- Penser à tester l'algorithme à la main ou en le programmant sur un cas simple pour bien vérifier que l'affichage est le bon (par exemple : chercher quand $V_n > 0{,}6$: pour $t = 0{,}4$, l'algorithme doit afficher $n = 2$ car $V_1 = \frac{1}{2}$ et $V_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0{,}75$).