Exercice 66

a. Suite définie par $u_n = 2,1^n$ pour $n \geq 0$:

On reconnaît une suite de terme général q^n avec $q = 2,1$.
On peut donc appliquer la propriété **1** page 158 : comme 2,1 > 1, la suite (u_n) est croissante.

b. Suite définie par $u_n = 3 + 2n$ pour $n \geq 0$:

On peut calculer $u_{n+1} - u_n$ pour déterminer son signe :
$u_{n+1} = 3 + 2(n+1) = 5 + 2n$
donc $u_{n+1} - u_n = 5 + 2n - (3 + 2n) = 2$.

Par conséquent, pour tout $n \geq 0$,

$u_{n+1} - u_n > 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$.

Ceci prouve que la suite (u_n) est croissante.

Méthode

On pourrait aussi montrer que la suite donnée à la question **b.** est une suite arithmétique de raison 2 et utiliser la propriété **1** page 158.

c. Suite définie par $u_n = 2 + \frac{3}{n}$ pour $n \geq 1$:

Pour tout $n \geq 1$, $n + 1 > n > 0$.
En appliquant la fonction inverse strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$, on obtient :

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

On multiplie chaque membre par 3, positif, ce qui ne change pas le sens de l'inégalité :

$$\frac{3}{n+1} < \frac{3}{n}$$

On ajoute 2 à chaque membre ce qui donne :

$$2 + \frac{3}{n+1} < 2 + \frac{3}{n}$$

autrement dit

$$u_{n+1} < u_n$$

La suite (u_n) est donc décroissante.

Méthode

La suite de la question c. peut être étudiée de plusieurs façons :
- Elle est donnée par une relation du type $u_n = f(n)$ avec $(x) = 2 + \frac{3}{x}$.
On peut donc étudier le sens de variation de la fonction f : la fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$, la fonction f l'est aussi (voir chapitre 2).
Pour tout $n \geq 0$, de $n + 1 > n > 0$ on déduit alors que $f(n+1) > f(n)$ c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$.
- L'expression de u_n étant assez simple, on aurait pu étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

d. Suite définie par $u_n = n \times 0,8^n$ pour $n \geq 0$.

Solution 1 :
On a $u_0 = 0$; $u_1 = 0,8$; $u_2 = 1,28$;

$u_3 = 1,536$; $u_4 = 1,6384$; $u_5 = 1,6384$;

$u_6 = 1,57286$.

Ainsi $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4 \leq u_5$ mais $u_5 > u_6$.

Conseil

On peut commencer par observer le comportement de la suite à l'aide d'une calculatrice.

La suite n'est donc ni croissante ni décroissante.

Solution 2 :

$u_{n+1} - u_n = (n+1)0{,}8^{n+1} - n0{,}8^n$

où $0{,}8^{n+1} = 0{,}8^n \times 0{,}8$.

Donc $u_{n+1} - u_n = 0{,}8^n[0{,}8(n+1) - n]$

$u_{n+1} - u_n = 0{,}8^n[0{,}8 - 0{,}2n]$

On a $0{,}8^n > 0$ pour tout $n \geq 0$

et $0{,}8 - 0{,}2\,n \geq 0 \iff n \leq 4$

Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0 \iff n \leq 4$.

On a donc $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4 \leq u_5$ puis la suite (u_n) est décroisante à partir du rang 5.

Méthode

On pourrait aussi pu penser à comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 mais ceci n'est possible que pour $n \geq 1$ car $u_0 = 0$.