Exercice 103

1. Quand il y a deux personnes, une seule poignée de main est échangée : $u_2 = 1$.
Quand il y a trois personnes (A, B, C), il y a 3 poignées de mains échangées (A-B ; A-C ; B-C) donc $u_3 = 3$.
Quand il y a quatre personnes (A, B, C, D), il y a 6 poignées de mains échangées (A-B ; A-C ; A-D ; B-C ; B-D ; C-D) donc $u_4 = 6$.

2. Il y a différentes façons d'appréhender cette question.
a. Par récurrence : on a pu remarquer en passant de 3 à 4 personnes dans la question **1**, c'est-à-dire en ajoutant un invité D, que l'on ajoutait les poignées de main échangées par chacune des 3 premières personnes A, B, C avec D.
De la même façon, si on a un groupe de n personnes ($n \geq 2$) le nombre de poignées échangées est u_n. En ajoutant une nouvelle personne à ce groupe, on ajoute les poignées de main entre cette personne et les n personnes déjà présentes dans le groupe.
Autrement dit $u_{n+1} = u_n + n$ pour $n \geq 2$.
De $u_2 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + n$ on peut grâce à un calculatrice ou un tableur déduire que $u_{20} = 190$.

b. Par un calcul direct.
On peut observer que pour écrire les poignées de main échangées dans la question **1**, on a d'abord considéré celles échangées avec A, puis celles échangées par B qui n'étaient pas déjà écrites, puis celles écrites par C autres que celles déjà écrites, etc.
Généralisons cette démarche.
Dans un groupe de n personnes, on choisit une 1re personne : elle échange $n - 1$ poignées de main.
Une 2e personne échange seulement $n - 2$ nouvelles poignées de main.
Et ainsi de suite jusqu'à l'avant dernière personne qui échange 1 seule nouvelle poignée de main.
La dernière personne a échangé des poignées de main qui sont déjà toutes comptées.
Donc $u_n = (n - 1) + (n - 2) + \ldots + 1$
On en déduit que $u_n = \frac{(n-1)n}{2}$.
On aura donc $u_{20} = \frac{19 \times 20}{2} = 190$.

➘Conseils

- Les premiers cas permettent souvent de donner une piste de résolution pour le cas général.
Compter de façon organisée dans les cas $n = 1, 2, 3$ peut mettre sur différentes voies.
- En cas de difficultés pour la question **2**, on peut prendre l'initiative de faire un décompte de plus à la main pour $n = 5$. L'important est de bien organiser ce nouveau décompte ; on pourra par exemple observer que l'on peut repartir du cas du groupe de 4 personnes pour passer au groupe de 5 personnes en ajoutant des poignées de main : ceci conduit à la solution par récurrence (**2.a.**)

c. Par un autre calcul direct.
Chaque personne d'un groupe de n personnes serre la main de n - 1 personnes.
Ceci nous donne donc (n - 1) × n poignées de main chacune étant comptée deux fois (par exemple, on a compté la poignée de main de A à B mais aussi de B à A).
Il y a donc en fait $\frac{(n-1)n}{2}$ poignées de main différentes.