

Exercice 102

1. Voir la démonstration de la propriété 2 page 132.

2. a. Le 100^e terme de cette suite est w_{99} .

La suite étant arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $w_0 = 2$, on a pour tout n de \mathbb{N} :

$$\begin{aligned} w_n &= w_0 + n \times r \\ \text{donc } w_{99} &= 2 + 99 \times 3 = 299. \end{aligned}$$

b. La somme des 100 premiers termes de cette suite est $S = w_0 + w_1 + \dots + w_{99}$.

On a donc :

$$w_0 = 2$$

$$w_1 = w_0 + 1 \times 3 = 2 + 1 \times 3$$

$$w_2 = w_0 + 2 \times 3 = 2 + 2 \times 3$$

etc. jusqu'à

$$w_{99} = 2 + 99 \times 3$$

Donc en remplaçant :

$$S = 2 + (2 + 1 \times 3) + (2 + 2 \times 3) + \dots + (2 + 99 \times 3)$$

$$S = \underbrace{2 + 2 + 2 + \dots + 2}_{\text{On ajoute 100 termes égaux à 2}} + 1 \times 3 + 2 \times 3 + \dots + 99 \times 3$$

On ajoute 100 termes égaux à 2

$$S = 2 \times 100 + 3 \times (1 + 2 + \dots + 99)$$

$$S = 200 + 3 \times \frac{99 \times 100}{2}$$

$$S = 15\,050$$

Conseil

On peut s'aider de l'interprétation géométrique de l'activité 4 page 127 pour s'en souvenir.

Conseil

$1, 2, \dots, n$ est une liste de n termes (n entier, $n \geq 1$).

$1, 2, \dots, 99$ est une liste de 99 termes donc $0, 1, 2, \dots, 99$ est une liste de 100 termes.

Méthode

Pour calculer la somme de termes d'une suite arithmétique (w_n), de raison r et premier terme w_0 ,

- on écrit chaque terme en fonction du premier terme :

$$w_1 = w_0 + 1 \times r;$$

$$w_2 = w_0 + 2 \times r;$$

etc. jusqu'au dernier terme de la somme ;

- on regroupe tous les premiers termes w_0 d'un côté et les autres de l'autre ;
- on utilise la formule de calcul de $1 + 2 + 3 + \dots + n$ (propriété 2 page 132).