

Exercice 73

1. Pour tout $x > 0$ et $y > 0$, le volume du conteneur est 8 m^3 mais aussi x^2y . Donc $x^2y = 8$ d'où $y = \frac{8}{x^2}$.

2. Il y a 2 faces carrées d'aire x^2 et 4 faces rectangulaires de dimensions x et y dont l'aire est xy .

Donc l'aire totale $A(x) = 2x^2 + 4xy$.

Or $y = \frac{8}{x^2}$ donc $A(x) = 2x^2 + \frac{32}{x}$.

3. a. Pour tout x ,

$$\begin{aligned} &(x - 2)(x^2 + 2x + 4) \\ &= x^3 + 2x^2 + 4x - 2x^2 - 4x - 8 \\ &= x^3 - 8 \end{aligned}$$

b. $x^2 + 2x + 4$ est un trinôme du second degré dont le discriminant est $2^2 - 16 = -12 < 0$ donc $x^2 + 2x + 4 > 0$ pour tout x .

Donc $x^3 - 8$ est du signe de $x - 2$
donc

x	0	2	$+\infty$
$x^3 - 8$	-	0	+

4. a. A est dérivable pour tout $x > 0$ comme somme de fonction dérivable.

$$A'(x) = 4x - \frac{32}{x^2} = 4 \frac{(x^3 - 8)}{x^2}$$

Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$ donc $A'(x)$ est du signe de $x^3 - 8$.

Donc

x	0	2	$+\infty$
$A'(x)$	-	0	+
$A(x)$			

b. Le conteneur le moins cher est celui dont la surface est la plus petite c'est-à-dire celui dont la longueur $x = 2m$ or $y = \frac{8}{x^2}$ donc $y = 2m$.

Méthode

Pour le signe d'une expression, on privilégie la forme factorisée.

- On étudie le signe de chacun des facteurs.
- On en déduit le signe du produit.