Exercice 71

1. Pour tout $x \in [-4\ ;\ 4]$, $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec
$u(x) = x$ et $v(x) = x^2 + 4$
u est dérivable sur $[-4\ ;\ 4]$, $u'(x) = 1$.
v est dérivable sur $[-4\ ;\ 4]$ et pour tout $x \in [-4\ ;\ 4]$ et $v(x) \neq 0$ et $v'(x) = 2x$.
Donc f est dérivable sur $[-4\ ;\ 4]$ et

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{4 - x^2}{(x^2+4)^2}$$

Pour tout $x \in [-4\ ;\ 4]$, $(x^2+4)^2 > 0$
donc $f'(x)$ est du signe de $4 - x^2$.

$4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$ est un trinôme du second degré dont les racines sont 2 et -2.

D'où le tableau :

x	-4		-2		2		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{1}{5}$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$\frac{1}{5}$

2. Le minimum de f sur $[-4\ ;\ 4]$ est $-\frac{1}{4}$ qui est atteint pour $x = -2$.
Le maximum de f sur $[-4\ ;\ 4]$ est $\frac{1}{5}$ et est atteint pour $x = 2$.

3. La fonction f est définie pour tout $x \in [-4\ ;\ 4]$ et $-\frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{1}{5}$.
Donc une fenêtre adaptée peut être
xmin=-4 ; xmax=4 ; ymin=-0,5 ymax=0,5.

4. f est strictement croissante sur [0 ; 2] et $f(0) = 0$ et $f(2) = \frac{1}{4}$ donc pour tout $x \in [0\,;2]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$.
De plus pour tout $x \in [2; 4]$, $\frac{1}{5} \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$ par lecture du tableau de variation.

Donc pour tout $x \in [0\,;4]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$.

Méthode

Pour étudier les variations d'une fonction, on peut dériver cette fonction et étudier le signe de la dérivée.
- On dérive la fonction.
- On étudie le signe de la dérivée.

Conseil
- Pour dériver une fonction, on commence par identifier le modèle ici, f est de la forme $\frac{u}{v}$
- On vérifie les hypothèses de la propriété **7** du chapitre 3.